

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とします。また \mathbf{R}^3 中に

$$L := L(\vec{a}, \vec{b}) = \{x\vec{a} + y\vec{b}; x, y \in \mathbf{R}\}$$

を定めます。

(1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ を示しましょう。 (2) $\vec{p}, \vec{q} \in L$ を示しましょう。さらに $\vec{p} \parallel \vec{q}$ を示しましょう。

解答 (1) \vec{a}, \vec{b} の第1成分と第2成分を用いて

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

となりますから $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ であることが分かります。

(2) 行基本変形

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -4 & -2 & -8 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(iii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

を用います (ここで行基本変形

$$(i) 2r+ = 1r \times (-2), \quad 3r+ = 1r$$

$$(ii) 2r \times = \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$(iii) 1r+ = 2r \times (-3), \quad 3r+ = 2r \times (-4)$$

を用いました*1)。この行基本変形で第4列、第3列をマスクして考えると

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{p} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 2y = 0 \\ -x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -\frac{1}{2} \\ y & = \frac{1}{2} \\ 0x + 0y & = 0 \end{cases}$$

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{q} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 9 \\ 2x + 2y = 10 \\ -x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 3 \\ y & = 2 \\ 0x + 0y & = 0 \end{cases}$$

であることが分かります。従って

$$\vec{p} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$$

*1 $a+ = b$ は a に b の中身を加えること、 $a \times = b$ は a に b の中身を減らすことです。プログラミングを学ぶと自然に思えるようになります。

が成立します。これから $\vec{p}, \vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ であることが従います。さらに \vec{p}, \vec{q} の第 1 成分と第 2 成分を用いて

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

から $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ が従います。または補足 1 にありますが、L04 で学んだ一般論を用いると

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} \neq 0$$

から $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ が従います。

補足 0 行基本変形で列ベクトルの間の線型関係が保たれることに注意します (S2 タームで学びます)。上の行基本における最後の行列 B を $B = (\vec{a}_2 \ \vec{b}_2 \ \vec{p}_2 \ \vec{q}_2)$ と列ベクトル表示すると

$$\vec{p}_2 = -\frac{1}{2}\vec{a}_2 + \frac{1}{2}\vec{b}_2, \quad \vec{q}_2 = 3\vec{a}_2 + 2\vec{b}_2$$

が成立しますから

$$\vec{p} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$$

が成立します。

補足 1 一般に $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{K}^n$ が $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ を満たすとし、このとき

$$\vec{p}, \vec{q} \in L = L(\vec{a}, \vec{b})$$

に対して

$$\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}, \quad \vec{q} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$$

と表すと

$$\vec{p} \nparallel \vec{q} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

となります。このことを示すために

$$(\vec{p} \ \vec{q}) = (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

と表現します。 $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$ が成立するとき

$$(\vec{p} \ \vec{q}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

とすると、

$$(\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が従います。 $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ が成立しているから

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

となります。いま $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ですから $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \vec{0}$ であることが分かります。これは $\vec{p} \nparallel \vec{q}$ であることを意味します。次に $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ であるとし、このときある $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に対して

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

となります。これから

$$(\vec{p} \vec{q}) = (\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から $\vec{p} \parallel \vec{q}$ が従います。

問題の状況で

$$(\vec{p} \vec{q}) = (\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} \neq 0$$

から $\vec{p} \not\parallel \vec{q}$ であることが分かります。

補足 2 一般に $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\vec{p}, \vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \lambda \vec{p} + \mu \vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b})$$

が成立します。実際

$$\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b}, \quad \vec{q} = x_2 \vec{a} + y_2 \vec{b}$$

と表すと

$$\begin{aligned} \lambda \vec{p} + \mu \vec{q} &= (\vec{a} \vec{b}) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_2) \vec{a} + (\lambda y_1 + \mu y_2) \vec{b} \in L(\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

と示せます。これを用いると

$$L(\vec{p}, \vec{q}) = \{\xi \vec{p} + \eta \vec{q}; \xi, \eta \in \mathbf{R}\} \subset L(\vec{a}, \vec{b})$$

であることが分かります。ここで

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

を仮定します。このとき

$$(\vec{a} \vec{b}) = (\vec{p} \vec{q}) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

が成立しますから $\vec{a}, \vec{b} \in L(\vec{p}, \vec{q})$ が分かります。 $L(\vec{p}, \vec{q})$ も足し算とスカラー倍について閉じていますから

$$L(\vec{a}, \vec{b}) \subset L(\vec{p}, \vec{q})$$

であることが分かります。以上で

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow L(\vec{p}, \vec{q}) = L(\vec{a}, \vec{b})$$

が示されました。

補足 3 補足 2 で以下を示したことになります。

定理 $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ が $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ を満たすとします。 $\vec{p}, \vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ に対して

$$\vec{p} \not\parallel \vec{q} \Rightarrow L(\vec{p}, \vec{q}) = L(\vec{a}, \vec{b})$$

これを以下のようにも示せます.

$$L(\vec{p}, \vec{q}) \subsetneq L(\vec{a}, \vec{b})$$

とするとある $\vec{r} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ が

$$\vec{r} \notin L(\vec{p}, \vec{q})$$

を満たします. このとき $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ は線型独立になります. 実際

$$c_1\vec{p} + c_2\vec{q} + c_3\vec{r} = \vec{0}$$

を仮定します. $c_3 \neq 0$ とすると

$$\vec{r} = -\frac{c_1}{c_3}\vec{p} - \frac{c_2}{c_3}\vec{q} \in L(\vec{p}, \vec{q})$$

となりますが, これはあり得ません. よって $c_3 = 0$ となり, さらに $c_1\vec{p} + c_2\vec{q} = \vec{0}$ から $c_1 = c_2 = 0$ が従います.

他方, $L(\vec{a}, \vec{b})$ に 3 本の線型独立なベクトルは存在しえません (講義で証明済み). よって $L(\vec{p}, \vec{q}) \subsetneq L(\vec{a}, \vec{b})$ はあり得ませんから $L(\vec{p}, \vec{q}) = L(\vec{a}, \vec{b})$ であることが分かります.

(ここから冒頭にある問題の状況) 補足 3 にある定理を用いると

$$L(\vec{a}, \vec{b}) = L(\vec{p}, \vec{q})$$

であることが分かります. また $\vec{a} \nparallel \vec{b}, \vec{p} \nparallel \vec{q}$ から

$$x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\xi\vec{p} + \eta\vec{q} = \xi'\vec{p} + \eta'\vec{q} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}$$

が従います. 上で示しましたが

$$(\vec{p} \ \vec{q}) = (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

が成立します. これから

$$(\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{p} \ \vec{q}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = (\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

が従います.

付録

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{K}^2$ に対して

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$$

を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ である $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^3$ が存在します.

証明 (i) $|\vec{a} \ \vec{b}| = 0$ ならば

$$x_0\vec{a} + y_0\vec{b} = \vec{0}$$

を満たす $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在します. これを

$$x_0\vec{a} + y_0\vec{b} + 0\vec{c} = \vec{0}$$

と見做します.

(ii) $|\vec{a} \ \vec{b}| \neq 0$ ならば $(\vec{a} \ \vec{b})$ は正則ですから

$$(\vec{a} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\vec{c}$$

を満たす $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$ が存在します. 上の等式は

$$x_0\vec{a} + y_0\vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

となります.