ハンドアウト 「部分空間」定理2の応用.

定理2 $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m \in \mathbb{R}^n$, $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell \in L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m)$ とする.

(1) $\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell$ が LI $\Rightarrow \ell \leq m$

(2) ((1)の対偶)

$\ell > m \Rightarrow \vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_\ell$ は LD.

定理（定理2の応用） V, W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間で $V \subset W$ とする.

(1) $\dim V \leq \dim W$

(2) $\dim V = \dim W \Rightarrow V = W$.

(3正明)

(1) $\dim V = l$, $\dim W = m$とする. Vの基底が$\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_l$, Wの基底が$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m$

とします.

$$\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_l \in L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m) \text{ が } LI.$$

なので定理2によって $l \leq m$.

(2)

準備　Vの基底が$\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_l$とします. $\vec{q}_{l+1} \notin V$である$\vec{q}_{l+1} \in \mathbb{R}^n$が

あるとします. このとき

$$\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_l, \vec{q}_{l+1} \text{ は } LI.$$

となります.

(準備の証明)　$c_1\vec{q}_1 + \cdots + c_l\vec{q}_l + c_{l+1}\vec{q}_{l+1} = \vec{0}$とします. $c_{l+1} \neq 0$

とすると

$$\vec{q}_{l+1} = -\frac{1}{c_{l+1}}(c_1\vec{q}_1 + \cdots + c_l\vec{q}_l) \in L(\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_l) = V$$

となり矛盾が生じます. 従って $c_{l+1} = 0$. このとき $c_1\vec{q}_1 + \cdots + c_l\vec{q}_l = \vec{0}$から $c_1 = \cdots = c_l = 0$

(2) $V \subsetneqq W$ とすると $\exists\, \vec{b} \in W$ が $\vec{b} \notin V$ を満たします。準備から ③

$$\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_m, \vec{b} \in L(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_m) = W \text{ が LI.}$$

となりますが $m+1 \leq m$ となり矛盾です。$V = W$ となることが分かります。