

# クラメールの公式・ベクトルの平行

LA2022 Lec02, Part 02 V01

Nobuyuki TOSE

April 20, 2022

# Part 02 a

## クラメールの公式

# クラメールの公式

連立1次方程式

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \cdots(1) \\ cx + dy = \beta \cdots(2) \end{cases}$$

を考える.  $y$  を消去するために  $(1) \times d - (2) \times b$  を考える.

$$\begin{array}{r} \phantom{-)} \quad \quad \quad adx \quad + \quad bdy \quad = \quad \alpha d \\ \phantom{-)} \quad \quad \quad bcx \quad + \quad bdy \quad = \quad \beta b \\ \hline (ad - bc)x \quad \quad \quad = \quad \alpha d - \beta b \end{array}$$

$x$  を消去するために  $(1) \times c - (2) \times a$  を考える.

$$\begin{array}{r} \phantom{-)} \quad \quad \quad acx \quad + \quad bcy \quad = \quad \alpha c \\ \phantom{-)} \quad \quad \quad acx \quad + \quad ady \quad = \quad \beta a \\ \hline (bc - ad)y \quad \quad \quad = \quad \alpha c - \beta a \end{array}$$

# 行列式・クラメールの公式

## 行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

これを用いると

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

特に  $D := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$  のとき

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

これをクラメールの公式と言います。

## クラメールの公式-例

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 4x + 4y = 8 \end{cases}$$

を解きます.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = -8 \neq 0$$

からクラメールの公式が適用できます. 実際

$$x = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(6 \cdot 4 - 8 \cdot 4) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$

$$y = -\frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(2 \cdot 8 - 4 \cdot 6) = -\frac{1}{8}(-8) = 1$$

# Part 02 b

## 斉次方程式の解

## クラメールの公式から分かること

斉次方程式

$$\begin{cases} ax + by = 0 \cdots (1) \\ cx + dy = 0 \cdots (2) \end{cases} \quad (\#)$$

を条件

$$D := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

の下で考えます. クラメールの公式を適用できて

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$D \neq 0 \Rightarrow ((\#) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}) \quad (3)$$

### (3) の逆は？

(3) の逆の対偶は？

$$D = ad - bc = 0 \Rightarrow \left( \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} (\#) \right) \quad (4)$$

証明に入る前に注意：

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$  は (#) を満たす.

(i)  $a \neq 0$  または  $b \neq 0$  のとき OK

(ii)  $c \neq 0$  または  $d \neq 0$  のとき OK

(iii)  $NOT((i) \vee (ii)) \equiv NOT(i) \wedge NOT(ii) \equiv a = b = c = d = 0$  のとき明らか.



## まとめ

$$D \neq 0 \Leftrightarrow \left( \begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$$

および

$$D = 0 \Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

## 次のステップへ準備

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$$

に対して

$$x\vec{a} + y\vec{b} = x \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_1 + yb_1 \\ \vdots \\ xa_i + yb_i \\ \vdots \\ xa_n + yb_n \end{pmatrix}$$

## 次のステップへ準備 (2a)

特に  $n = 2$  のとき

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$$

に対して

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{\gamma} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = \gamma_1 \\ a_2x + b_2y = \gamma_2 \end{cases}$$

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \end{cases}$$

## 次のステップへ準備 (2b)

行列式を

$$|\vec{a} \vec{b}| := \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

と定義すると「まとめ」は

$$|\vec{a} \vec{b}| \neq 0 \Leftrightarrow (x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0})$$

$$|\vec{a} \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} (x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0})$$

## 次のステップへ準備 (3)

特に  $n = 3$  のとき

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^3$$

に対して

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{\gamma} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = \gamma_1 \\ a_2x + b_2y = \gamma_2 \\ a_3x + b_3y = \gamma_3 \end{cases}$$

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y = 0 \\ a_2x + b_2y = 0 \\ a_3x + b_3y = 0 \end{cases}$$

## Part 02c

# ベクトルの平行・非平行

## 定義-ベクトルの平行

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$$

に対して

$$\vec{a} \not\parallel \vec{b} \Leftrightarrow \left( x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \left( x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \right)$$

と定義します.

## 定義-ベクトルの平行-2次元の場合の言い換え

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$$

に対して

$$\vec{a} \not\parallel \vec{b} \Leftrightarrow \left( x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right) \Leftrightarrow |\vec{a} \ \vec{b}| \neq 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \left( x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0} \right) \Leftrightarrow |\vec{a} \ \vec{b}| = 0$$



## $n = 3$ の場合は

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^3 \text{ に対して } x\vec{a} + y\vec{b} = \begin{pmatrix} xa_1 + yb_1 \\ xa_2 + yb_2 \\ xa_3 + yb_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

を仮定します.  $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$  ならば

$$\begin{cases} a_2x + b_2y = 0 \\ a_3x + b_3y = 0 \end{cases} \quad \text{から} \quad x = y = 0$$

となります. 以上で

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \nparallel \vec{b}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \nparallel \vec{b}$$

## $n = 3$ の場合：逆は？

前ページの結論の逆（その対偶）は

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$a_1 \neq 0$ の場合は

$$-\frac{b_1}{a_1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 + b_1 \\ \frac{-b_1 a_2 + b_2 a_1}{a_1} \\ \frac{-b_1 a_3 + b_3 a_1}{a_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から  $\vec{a} \parallel \vec{b}$  であることが分かります。

$a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$  の場合も同様です（各自示しましょう）。

**注意** 実はここで何かを言わないと証明が不十分となります。

# まとめ

$$\vec{a} \nparallel \vec{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

## Part 02d

# ベクトルの平行・非平行（続） —教科書 15P 定理 1.6

## 2本の平行でないベクトル-定理 1.6

$\vec{x}, \vec{y}$ が平行でないとします：

$$\vec{x} \not\parallel \vec{y}$$

この2本のベクトルが張る2本のベクトル

$$\vec{\alpha} = a_1\vec{x} + b_1\vec{y}, \quad \vec{\beta} = a_2\vec{x} + b_2\vec{y}$$

に対して

**定理 1.6 (教科書 15P)**

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

## 定理 1.6 の証明

$$\begin{aligned}\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} &= \lambda(a_1\vec{x} + b_1\vec{y}) + \mu(a_2\vec{x} + b_2\vec{y}) \\ &= (\lambda a_1 + \mu a_2)\vec{x} + (\lambda b_1 + \mu b_2)\vec{y}\end{aligned}$$

から

$$\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \vec{0} \iff (*) \begin{cases} \lambda a_1 + \mu a_2 = 0 \\ \lambda b_1 + \mu b_2 = 0 \end{cases}$$

ここで  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$  ならば  $(*) \Rightarrow \lambda = \mu = 0$

他方  $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$  ならば  $(*)$  を満たす  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$  が存在します。