SL02 補足演習問題

I

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して $||\vec{a} - t\vec{b}||^2$ を最小にする t を求めましょう.

解答

$$||\vec{a}||^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30, \quad (\vec{a}, \vec{b} = 1 + (-2)) + 3 + 4 = 6, \quad ||\vec{b}||^2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

となります.

$$\begin{aligned} ||\vec{a} - t\vec{b}||^2 &= ||\vec{a}||^2 - 2t(\vec{a}, \vec{b}) + t^2||\vec{b}||^2 \\ &= 4t^2 - 12t + 30 \\ &= 4\left(t - \frac{3}{2}\right) + 30 - 9 = 4\left(t - \frac{3}{2}\right) + 21 \end{aligned}$$

から

$$t = \frac{3}{2} \quad \text{のとき最小値} \quad 21$$

をとります.

II

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします.

(1) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ であることを示しましょう.

(2) $||\vec{g} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2$ を最小にする x, y を求めましょう.

解答 (1)

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0$$

(2)

$$\begin{aligned} ||\vec{g} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2 &= ||\vec{g}||^2 - 2(\vec{g}, x\vec{a} + y\vec{b}) + ||x\vec{a} + y\vec{b}||^2 \\ &= ||\vec{g}||^2 - 2(\vec{g}, x\vec{a} + y\vec{b}) + x^2||\vec{a}||^2 + y^2||\vec{b}||^2 \\ &= 1 - 2x + 2y + 3x^2 + 6y^2 \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

において最後の等号成立条件は $x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{6}$ であるので $||\vec{g} - x\vec{a} - \vec{b}||^2$ は

$$x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{6} \quad のとき \quad 最小値\frac{1}{2}$$

をとります.

> **III** 次の 3 点を通る平面の方程式を求めましょう.
> **(1)** $(0,0,0),\ (1,2,3),\ (4,5,6)$
> **(2)** $(2,0,0),\ (0,3,0),\ (0,0,4)$
> **(3)** $(1,2,3),\ (-1,-1,0),\ (2,-3,5)$

解答 (1)

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

から原点を通り法線ベクトルが $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ であるので，求める平面の方程式は

$$x - 2y + z = 0$$

であることが分かります.

(2)

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$

は平面を表して，与えられた 3 点を通るので，これが求める方程式となります.

(3)

$$\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\-3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\-3\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-21\\1\\13\end{pmatrix}$$

から平面の法線ベクトルは $\begin{pmatrix}-21\\1\\13\end{pmatrix}$ であることが分かります．これから求める平面の方程式は

$$-21(x-1) + (y-2) + 13(z-3) = 0$$

となります.

> **IV** $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ が平行でないとします。このとき
>
> $$\vec{x} \not\parallel \lambda\vec{x} + \vec{y}, \quad \vec{x} + \vec{y} \not\parallel \vec{x} - \vec{y}$$
>
> であることを示しましょう.

解答

$$c_1\vec{x}+c_2\left(\lambda\vec{x}+\vec{y}\right)=\left(c_1+\lambda c_2\right)\vec{x}+c_2\vec{y}=\vec{0}$$

とします．このとき $\vec{x}\nparallel\vec{y}$ から

$$\begin{cases} c_1 + \lambda c_2 = 0 \\ \qquad c_2 = 0 \end{cases}$$

が従います．ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

に注意すると $c_1=c_2=0$ が従います．従って

$$\vec{x}\nparallel\lambda\vec{x}+\vec{y}$$

であることが分かります．他方

$$c_1(\vec{x}+\vec{y})+c_2(\vec{x}-\vec{y})=(c_1+c_2)\vec{x}+(c_1-c_2)\vec{y}=\vec{0}$$

とします．このとき $\vec{x}\nparallel\vec{y}$ から

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

が従います．ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$$

に注意すると $c_1=c_2=0$ が従います．従って

$$\vec{x}+\vec{y}\nparallel\vec{x}-\vec{y}$$

であることが分かります．

IV $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{R}^n$ は平行でないとします：

$$\vec{a}\nparallel\vec{b}$$

このとき

$$\vec{\alpha}=x\vec{a}+y\vec{b},\quad \vec{\beta}=z\vec{a}+w\vec{b}$$

とするとき

$$\vec{\alpha}\nparallel\vec{\beta}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix}\neq 0$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$\begin{aligned} c_1\vec{\alpha}+c_2\vec{\beta}&=c_1(x\vec{a}+y\vec{b})+c_2(z\vec{a}+w\vec{b}) \\ &=(xc_1+zc_2)\vec{a}+(yc_1+wc_2)\vec{b}=\vec{0} \end{aligned}$$

とします．$\vec{a}\nparallel\vec{b}$ から

$$\begin{cases} xc_1+zc_2 = 0 \\ yc_1+wc_2 = 0 \end{cases}\qquad(\#)$$

が従います.

ここで $\left|\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ ならば (#) から $c_1 = c_2 = 0$ が導けますから

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$$

が従います．他方

$$\left|\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right| = 0$$

ならば (#) を満たす $c_1, c_2 \in \mathbf{K}$ で $c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$ を満たすものが存在して

$$c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} = \vec{0}$$

が成立します．これは

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$$

を意味します.

VII $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします．平面

$$ax + by + cz + q = 0$$

と点 (x_0, y_0, z_0) の距離 δ は

$$\delta = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + q|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

となることを示しましょう.

解答 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り方向ベクトルが $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ の直線 ℓ と平面

$$\pi: \ ax + by + cz + q = 0 \tag{1}$$

の交点 P_1 の座標を求めます．直線 ℓ の上の点の座標は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + at \\ y_0 + bt \\ z_0 + ct \end{pmatrix}$$

となりますから，(1) に代入して

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + q = 0$$

から

$$t = -\frac{az_0 + by_0 + cz_0 + q}{a^2 + b^2 + c^2} \tag{3}$$

であることが分かります．さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

なので

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}\right| = |t|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|az_0 + by_0 + cz_0 + q|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

であることが分かります.