第 1 講義 2022 年 04 月 11 日　演習問題解答

I 以下の函数の停留点を求めましょう．

(1)　$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 8y$　(2)　$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

(3)　$z = x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y$　(4)　$z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$

(5)　$z = x^3 - xy - y^2$

(1)

$$\left\{\begin{array}{lllll} z_x & = & 2x + y - 4 & = & 0 \\ z_y & = & x + 2y - 8 & = & 0 \end{array}\right.$$

をクラメールの公式を使って解くと

$$x = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{0}{3} = 0, \quad y = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{12}{3} = 4$$

となりますから，$(x, y) = (0, 4)$ が z の停留点であることが分かります．

(2)

$$\left\{\begin{array}{lllll} z_x & = & 3x^2 - 9y & = & 0 \cdots (I) \\ z_y & = & 3y^2 - 9x & = & 0 \cdots (II) \end{array}\right.$$

を解きます．(I) から $y = \frac{1}{3}x^2$ となるので (II) から得られる $y^2 = 3x$ に代入して

$$\frac{1}{9}x^4 = 3x \quad \text{すなわち} \quad x^4 = 27x$$

を得ます．従って

$$x = 0 \quad \text{または} \quad x = 3$$

が必要です．

(a) $\underline{x = 0 \text{ のとき}}$, (I) から $y = 0$ となりますが、逆に $(x, y) = (0, 0)$ は (I) かつ (II) を満たします．

(b) $\underline{x = 3 \text{ のとき}}$, (I) から $y = 3$ となりますが、逆に $(x, y) = (3, 3)$ は (I) かつ (II) を満たします．

以上で z の停留点は $(x, y) = (0, 0), (3, 3)$ であることが分かりました．

(3)

$$\left\{\begin{array}{lllll} z_x & = & 2x + y - 4 & = & 0 \\ z_y & = & x - 2y - 2 & = & 0 \end{array}\right.$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad y = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{0}{-5} = 0$$

となりますから，$(x, y) = (2, 0)$ が z の停留点であることが分かります．

(4)

$$\left\{\begin{array}{lllll} z_x & = & 2x + 4y - 6 & = & 0 \\ z_y & = & 4x + 4y - 8 & = & 0 \end{array}\right.$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad y = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{-8}{-8} = 1$$

から停留点は $(x, y) = (1, 1)$ となります．

(5)

$$\left\{\begin{array}{llllll} z_x & = & 3x^2 - y & = & 0 & (i) \\ z_y & = & -x - 2y & = & 0 & (ii) \end{array}\right.$$

を解きます。(ii) から $x = -2y$ となりますが，これを (i) に代入して

$$12y^2 - y = 0$$

を得ますが，これから $y = 0$ または $y = \frac{1}{12}$ であることが分かります．これを $x = -2y$ に代入して

$$\begin{array}{lll} y = 0 & \text{のとき} & x = 0 \\ y = \frac{1}{12} & \text{のとき} & x = -\frac{1}{6} \end{array}$$

となりますから，停留点は

$$(x, y) = (0, 0), \quad (-\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$$

であることが分かります．