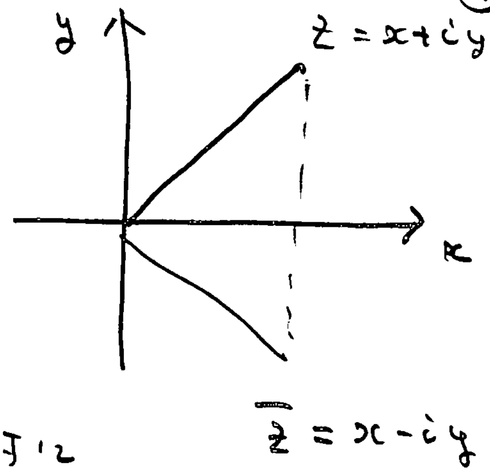
第2章

§1 複素数



共役複素数

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して

$$\bar{z} := x - iy$$

を z の共役複素数と呼びます.

共役複素数の性質

$z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ に対して

1° $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

2° $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

3° $z \neq 0$ のとき $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$

4° $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$

各自これを示せ.

$z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とする. このとき $\bar{z} = a - ib$

$z + \bar{z} = 2a$, $z - \bar{z} = 2ib$ から

5° $a = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$, $b = \dfrac{z - \bar{z}}{2}$

6° $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ なので

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

演習 次の定理を証明する.

定理 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{R}[z]$$

を考える. $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し

$$f(\alpha) = 0 \Longrightarrow f(\overline{\alpha}) = 0$$

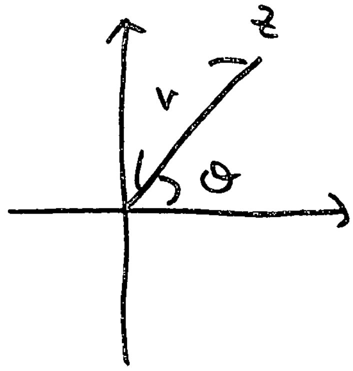
注 $n=2$ で考えてみよ.

複素数の極形式.

$z = x + iy \in \mathbb{C}$ ($x, y \in \mathbb{R}$) が $z \neq 0$ とする.

$$z = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

と変形する.



$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 1$$

なので $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$$

を満たす. このとき $r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおくと (z の極形式)

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ とする.

$$z_1 = r_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$
$$z_2 = r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

とする. このとき

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$$

(各自これを示せ) から三角定理を思い出す.

$z = x + iy \neq 0$ $(x, y \in \mathbb{R})$ のとき

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

とすると

$$\frac{1}{z} = r^{-1}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right)$$

(1311) $z = (1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

このとき

$$z^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n}{4}\pi + i\sin\frac{n}{4}\pi\right)$$

公式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$, $r > 0$

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

この問題はビデオの33分以降に解説しています.