復習

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} \vdots \\ b_i \\ \vdots \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} \vdots \\ c_i \\ \vdots \end{pmatrix}$ とすると

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} = \begin{pmatrix} \vdots \\ x a_i + y b_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ (a_i\ b_i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \begin{pmatrix} \vdots \\ x a_i + y b_i + z c_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ (a_i\ b_i\ c_i)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

行列×行列 1

$X = (a, \vec{b})$ とする.

$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbb{R}^2$ のとき

$$(\vec{a}\ \vec{b})(\vec{p}\ \vec{q}) = \left((\vec{a}\ \vec{b})\vec{p}\quad (\vec{a}\ \vec{b})\vec{q}\right)$$

$$= (p_1\vec{a} + p_2\vec{b}\quad q_1\vec{a} + q_2\vec{b})$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ p_1 a_i + p_2 b_i & q_1 a_i + q_2 b_i \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ (a_i\ b_i)\vec{p} & (a_i\ b_i)\vec{q} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a}\ \vec{b})(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) = \left((\vec{a}\ \vec{b})\vec{p}\quad (\vec{a}\ \vec{b})\vec{q}\quad (\vec{a}\ \vec{b})\vec{r}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_i\ b_i)\vec{p} & (a_i\ b_i)\vec{q} & (a_i\ b_i)\vec{r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

② $X = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$, $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbb{R}^3$ とする.

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})(\vec{p}\ \vec{q}) = \big((\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{p}\quad (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{q}\big)$$

$$= (p_1\vec{a} + p_2\vec{b} + p_3\vec{c}\quad q_1\vec{a} + q_2\vec{b} + q_3\vec{c})$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ p_1 a_i + p_2 b_i + p_3 c_i & q_1 a_i + q_2 b_i + q_3 c_i \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ (a_i\ b_i\ c_i)\vec{p} & (a_i\ b_i\ c_i)\vec{q} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) = \big((\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{p}\quad (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{q}\quad (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{r}\big)$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_i\ b_i\ c_i)\vec{p} & (a_i\ b_i\ c_i)\vec{q} & (a_i\ b_i\ c_i)\vec{r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

線型性とその拡張

L05の講義で示したが

1° $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^2$ のとき

$$\big((\vec{a}\ \vec{b})(\vec{p}+\vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b})\vec{p} + (\vec{a}\ \vec{b})\vec{q}\big)$$

$$(\vec{a}\ \vec{b})(\lambda\vec{p}) = \lambda\big((\vec{a}\ \vec{b})\vec{p}\big)$$

まとめると $(\vec{a}\ \vec{b})(\lambda\vec{p} + \mu\vec{q}) = \lambda\big((\vec{a}\ \vec{b})\vec{p}\big) + \mu\big((\vec{a}\ \vec{b})\vec{q}\big)$

これは結合則より

$$(\vec{a}\ \vec{b})\left((\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}\lambda \\ \mu\end{pmatrix}\right) = \big((\vec{a}\ \vec{b})\vec{p}\quad (\vec{a}\ \vec{b})\vec{q}\big)\begin{pmatrix}\lambda \\ \mu\end{pmatrix}$$

$$= \big((\vec{a}\ \vec{b})(\vec{p}\ \vec{q})\big)\begin{pmatrix}\lambda \\ \mu\end{pmatrix}$$

となる.

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \cdots, \vec{p}_\ell \in \mathbb{R}^2$ とする

$$(\vec{a}\ \vec{b})(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3) = (\vec{a}\ \vec{b})(\vec{p}_1+\vec{p}_2) + (\vec{a}\ \vec{b})\vec{p}_3$$
$$= (\vec{a}\ \vec{b})\vec{p}_1 + (\vec{a}\ \vec{b})\vec{p}_2 + (\vec{a}\ \vec{b})\vec{p}_3$$

一般に

$$(\vec{a}\ \vec{b})(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\cdots+\vec{p}_\ell) = (\vec{a}\ \vec{b})\vec{p}_1 + \cdots + (\vec{a}\ \vec{b})\vec{p}_n$$

$$(\vec{a}\ \vec{b})(\lambda_1\vec{p}_1+\lambda_2\vec{p}_2+\cdots+\lambda_\ell\vec{p}_\ell)$$
$$= (\vec{a}\ \vec{b})(\lambda_1\vec{p}_1) + \cdots + (\vec{a}\ \vec{b})(\lambda_\ell\vec{p}_\ell)$$
$$= \lambda_1(\vec{a}\ \vec{b})\vec{p}_1 + \cdots + \lambda_\ell(\vec{a}\ \vec{b})\vec{p}_\ell$$

これは

$$(\vec{a}\ \vec{b})\left((\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_\ell)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_\ell\end{pmatrix}\right) = \left((\vec{a}\ \vec{b})(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_\ell)\right)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_\ell\end{pmatrix}$$

と意味する.

2° $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$ とすると

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})(\vec{p}+\vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{p} + (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{q} \quad (1)$$
$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})(\lambda\vec{p}) = \lambda\left((\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{p}\right) \quad (2)$$

まとめると

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})(\lambda\vec{p}+\mu\vec{q}) = \lambda\left((\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{p}\right) + \mu\left((\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{q}\right)$$

これは

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\left((\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}\right) = \left((\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})(\vec{p}\ \vec{q})\right)\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$$

上の (1), (2) は自分で示してみましょう.

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \cdots, \vec{p}_\ell \in \mathbb{R}^3$ とする

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})(\vec{p}_1+\cdots+\vec{p}_\ell) = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{p}_1 + \cdots + (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{p}_\ell$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})(\lambda_1\vec{p}_1 + \cdots + \lambda_\ell\vec{p}_\ell) = \lambda_1((\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{p}_1) + \cdots + \lambda_\ell((\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{p}_\ell)$$

これは結合則

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\left((\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_\ell)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_\ell\end{pmatrix}\right) = \left((\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_\ell)\right)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_\ell\end{pmatrix}$$

以下はL06_05269の内容です.

結合則　$X = (\vec{a}\ \vec{b})$　$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbb{R}^2$

または

$X = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$　$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbb{R}^3$

とします. このとき $Y = (\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})$ は 2行3列 または 3行3列です.

$Z = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma})$ を 3行3列とします ($\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$)

このとき

$$(XY)Z = X(YZ)$$

$$\text{左} = ((XY)\vec{\alpha}\ \ (XY)\vec{\beta}\ \ (XY)\vec{\gamma})$$
$$= (X(Y\vec{\alpha})\ \ X(Y\vec{\beta})\ \ X(Y\vec{\gamma}))$$
$$= X(Y\vec{\alpha}\ \ Y\vec{\beta}\ \ Y\vec{\gamma})$$
$$= X(Y(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma})) = X(YZ)$$

このようにすると一般の結合則も示せます