解答例と補足（スペクトル分解）

線形代数（後期） **LA2023WL08 1129**

QID 1000

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

この 3 次正方行列 $A \in M_3(\mathbf{R})$ に対して固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ を求めて 1 個の固有値に対して固有ベクトルをすべて求めましょう..

$1\nu \mathrel{+}= 2\nu \times (-1)$

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -2 & -2 \\ 7 & \lambda-5 & -3 \\ 5 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ 17 & \lambda-5 & -3 \\ 5 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & \lambda-5 & -3 \\ 5 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-5 & 4 \\ 0 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-5 & 4 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda+3) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 2, 3$. 次に固有ベクトルを求める.

<u>$\lambda = 1$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

から固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(z \neq 0)$

<u>$\lambda = 2$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & -3 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad (\#)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & -3 & -3 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と行基本変形できるので

$(\#) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ となる. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(z \neq 0)$

が固有ベクトル

λ=3 のとき

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-2&4\\0&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0} \iff \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}$$

$$\iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

から $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\2z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ $(z \neq 0)$ が固有ベクトル.

補足 $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{p}_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ とすると一般論から $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は LI となります. 従って $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は正則であることが分かります.
このとき

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (\vec{p}_1\ 2\vec{p}_2\ 3\vec{p}_3) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$$

から $P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}$ と対角化できます.

補足 $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ は $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$, $\vec{v}_1 \in V(1)$, $\vec{v}_2 \in V(2)$, $\vec{v}_3 \in V(3)$ と一意的に分解できます. (A によるスペクトル分解)

$$\vec{v} = c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 + c_3\vec{p}_3 = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$ から $\vec{c} = P^{-1}\vec{v}$ とおけば

$\vec{v}_1 = c_1\vec{p}_1 \in V(1)$, $\vec{v}_2 = c_2\vec{p}_2 \in V(2)$, $\vec{v}_3 = c_3 V(3)$ とすれば

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

が成立します. 一意性は以下の定理から従います.

定理 $A \in M_3(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ が $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq \gamma$, $\gamma \neq \alpha$ を満たすとき

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_1 \in V(\alpha),\ \vec{v}_2 \in V(\beta),\ \vec{v}_3 \in V(\gamma) \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \vec{0}$$

(証明) $\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3=\vec{0}$ (1)

の両辺に $A-\gamma I_3$ をかけると

$$(\alpha-\gamma)\vec{v}_1+(\beta-\gamma)\vec{v}_2=\vec{0} \qquad (2)$$

となります. さらに $(A-\beta I_3)$ をかけると

$$(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)\vec{v}_1=\vec{0} \quad 従って \quad \underline{\vec{v}_1=\vec{0}} \qquad (3)$$

(2) に $\vec{v}_1=\vec{0}$ を代入すると $(\beta-\gamma)\vec{v}_2=\vec{0}$ 従って $\underline{\vec{v}_2=\vec{0}}$.

(1) に $\vec{v}_1=\vec{v}_2=\vec{0}$ を代入すると $\underline{\vec{v}_3=\vec{0}}$ も従います.

(応用)

$\vec{v}_1, \vec{w}_1 \in V(\alpha)$, $\vec{v}_2, \vec{w}_2 \in V(\beta)$, $\vec{v}_3, \vec{w}_3 \in V(\gamma)$

が

$$\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3=\vec{w}_1+\vec{w}_2+\vec{w}_3$$

とすると $(\vec{v}_1-\vec{w}_1)+(\vec{v}_2-\vec{w}_2)+(\vec{v}_3-\vec{w}_3)=\vec{0}$

$\vec{v}_1-\vec{w}_1 \in V(\alpha)$, $\vec{v}_2-\vec{w}_2 \in V(\beta)$, $\vec{v}_3-\vec{w}_3 \in V(\gamma)$

となるので $\vec{v}_1-\vec{w}_1=\vec{v}_2-\vec{w}_2=\vec{v}_3-\vec{w}_3=\vec{0}$ 従って $\vec{v}_1=\vec{w}_1$, $\vec{v}_2=\vec{w}_2$, $\vec{v}_3=\vec{w}_3$

となります.

ここで $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ -7 & 5 & 3\\ -5 & 2 & 4\end{pmatrix}$ に限りましょう.

一般に

$f(\lambda)=a_m\lambda^m+\cdots+a_1\lambda+a_0$ に対して

$$f(A):=a_mA^m+\cdots+a_1A+a_0I_3$$

と定義します. $\vec{q}\in\mathbb{R}^3$ が $A\vec{q}=\alpha\vec{q}$ を満たすとき $A^k\vec{q}=\alpha^k\vec{q}$

が成立するので

$$\begin{cases} f(A)\vec{v}_1=f(1)\vec{v}_1\\ f(A)\vec{v}_2=f(2)\vec{v}_2\\ f(A)\vec{v}_3=f(3)\vec{v}_3\end{cases}$$

となります.

$\vec{v}_1$ を $\vec{v}$ で表わす。　$f(1)=1,\ f(2)=f(3)=0$ となる多項式

$$f_1(\lambda)=\frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{(1-2)(1-3)}=-\frac{1}{2}(\lambda-2)(\lambda-3)$$

を用いると

$$\vec{v}_1=-\frac{1}{2}(A-2I_3)(A-3I_3)\vec{v}$$

$\vec{v}_2$ を $\vec{v}$ で表わす　$f(1)=0,\ f(2)=1,\ f(3)=0$ となる多項式

$$f_2(\lambda)=\frac{(\lambda-1)(\lambda-3)}{(2-1)(2-3)}=-(\lambda-1)(\lambda-3)$$

を用いると

$$\vec{v}_2=-(A-I_3)(A-3I_3)\vec{v}$$

$\vec{v}_3$ を $\vec{v}$ で表わす。　$f(1)=f(2)=0,\ f(3)=1$ となる多項式

$$f_3(\lambda)=\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{(3-1)(3-2)}=\frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda-2)$$

を用いると

$$\vec{v}_3=\frac{1}{2}(A-I_3)(A-2I_3)\vec{v}$$

となる。