5.1.2　部分空間の生成・線型独立

さらに議論を深めるために，次の定義 5.2 を与えます．

定義 5.2. **（部分空間の生成）(i)** ベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ があるとします．$\vec{w}$ が $c_1, \cdots, c_k \in \mathbf{R}$ を用いて

$$\vec{w} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_k\vec{x}_k \tag{5.2}$$

と書けるとき $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k$ の**線型結合**であるといいます．
(ii) $\mathbf{R}^n$ の部分空間 V の任意のベクトルが $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$，$\cdots, \vec{x}_k \in V$ の線型結合であるとき，すなわち

$$V = \{\vec{w} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_k\vec{x}_k;\ c_j \in \mathbf{R}\ (j = 1, \cdots, k)\}$$

であるとき，V は $\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$，$\cdots, \vec{x}_k$ で**張られる**，あるいは**生成される**といいます．このとき $V = \mathbf{R}\vec{x}_1 + \cdots + \mathbf{R}\vec{x}_k$ または $V = L(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k)$ と記します．

定義 5.2 の (5.2) において $X = (\vec{x}_1\ \cdots\ \vec{x}_k)$ と定義すると

$$\begin{aligned}\vec{w}\text{が}\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k\text{の線型結合である} &\Leftrightarrow \text{ある}\vec{c} \in \mathbf{R}^k\text{に対して}\vec{w} = X\vec{c} \\ &\Leftrightarrow \vec{w} \in \mathrm{Im}(X) \Leftrightarrow \mathrm{rank}(X) = \mathrm{rank}(X|\vec{w})\end{aligned}$$

が成立することに注意しましょう．

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とすると

$$(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3|\vec{w}) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

と行基本変形されますから $\vec{w}$ は $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ の線型結合にはなりません．

演習 5.2. $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ が $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ の線型結合となる必要十分条件を求めましょう．

例 5.1 の V_1 において，$\vec{v} = {}^t(x\ y\ z) \in V_1$ とすると，$x + y + z = 0$ が成立しますから

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

と V_1 が $\vec{v}_1 = {}^t(-1\ 1\ 0)$ と $\vec{v}_2 = {}^t(-1\ 0\ 1)$ で生成されます．さらに任意の $\vec{v} \in V_1$ に対して

$$\vec{v} = y\vec{v}_1 + z\vec{v}_2 = y'\vec{v}_1 + z'\vec{v}_2$$

と 2 通りに表示されたとすると

$$\begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y'-z' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

から $y = y'$ と $z = z'$ が従います．このように V_1 のベクトルは $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ の線型結合として**一意的に**表示されます（このことをもって $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ が V_1 の**基底**であるといいます）.

この例を念頭において，次の定義 5.3 を与えます.

定義 5.3.（線型独立，線型従属）
(i) ベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ が**線型独立（1 次独立）**であるとは,

$$c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

が成立するときです.
(ii) ベクトル $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ が**線型従属**であるとは，線型独立でないとき，すなわち

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_k\vec{x}_k = \vec{0}$$

を満たす $c_1, c_2, \cdots, c_k \in \mathbf{R}$ が存在して，ある j に対して $c_j \neq 0$ が成立するときです．このとき $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\cdots$, $\vec{x}_k$ には，**非自明な線型関係**があるといいます.

(5.3) にある $\vec{v}_1 = {}^t(-1\ 1\ 0)$ と $\vec{v}_2 = {}^t(-1\ 0\ 1)$ は線型独立です．実際

$$c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

から $c_1 = c_2 = 0$ が従います.

上の定義 5.3 において $k=2$ とします．すなわち 2 本のベクトル $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2 \in \mathbf{R}^n$ を考えます。14 ページで考えたベクトルの平行の定義を思い出すと

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \text{が線型独立} \Leftrightarrow \vec{x}_1 \not\parallel \vec{x}_2$$

であることが分かります。また $k=1$ のときは

$$\vec{x}_1 \text{が線型独立} \Leftrightarrow \vec{x}_1 \neq \vec{0}$$

となります（演習 5.3 参照)。

演習 5.3. $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ が $\vec{x} \neq \vec{0}$ を満たすとします．このとき $\vec{x}$ が線型独立であることを示しましょう．

上の定義 5.3 において $X = (\vec{x}_1 \ \cdots \ \vec{x}_k)$ と $n \times k$ 行列を定めるとき

$$X\vec{c} = c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k$$

から

$$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \text{は線型独立} \Leftrightarrow \left(X\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = \vec{0}\right) \Leftrightarrow \mathrm{rank}(X) = k$$

$$\begin{aligned}\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \text{は線型従属} &\Leftrightarrow \left(\text{ある}\vec{c} \in \mathbf{R}^k \text{に対して} X\vec{c} = \vec{0} \text{かつ} \vec{c} \neq \vec{0}\right) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rank}(X) < k\end{aligned}$$

が成立することに注意しましょう．ここで行列 X の階数に関して 74 ページの定理 3.7 を用いました．

さらに $n < k$ のとき $\mathrm{rank}(X) < k$ が必ず成立しますから

$$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k$$

は線型従属となることに注意しましょう（定理 5.3 で同じことを取り上げます)．

上で述べた，生成，線型独立性の概念を深めるために，さらに実例を考えます．(5.3) の行列 A に対して，その核 $\ker(A)$ について考えます．$\vec{v} = {}^t(v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4) \in \ker(A)$ とすると，$A\vec{v} = \vec{0}$ がその条件です．この連立 1 次方程式は行列 A が

$$A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{a}_3 \ \vec{a}_4) \longrightarrow \cdots \longrightarrow B = \left(\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3 \ \vec{b}_4\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と行基本変形されることから

$$\begin{cases} v_1 & & -v_3 & & = & 0 \\ & v_2 & -2v_3 & & = & 0 \\ & & & v_4 & = & 0 \end{cases}$$

と必要十分です．ここでピボットのない変数 v_3 に関して $v_3 = \alpha$ とすると ${}^t(v_1\ v_2\ v_3\ v_4) = (\alpha\ 2\alpha\ \alpha\ 0)$ となります．このことから $\vec{v} \in \ker(A)$ とすると

$$\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と ${}^t(1\ 2\ 1\ 0)$ で生成されます．

次に $\mathrm{Im}(A)$ について考えます．$\vec{v} = A\vec{w} \in \mathrm{Im}(A)$ で $\vec{w} = {}^t(w_1\ w_2\ w_3\ w_4)$ のとき

$$\vec{v} = w_1\vec{a}_1 + w_2\vec{a}_2 + w_3\vec{a}_3 + w_4\vec{a}_4$$

と A の列ベクトル 4 本で張られていることが分かります．実は，次のように考えると，$\mathrm{Im}(A)$ を生成するのに 3 本で十分であることが分かります．A の行基本変形の計算から，有限個の基本行列 $P_1, P_2, \cdots, P_\ell$ が存在して

$$P_\ell P_{\ell-1} \cdots P_1 A = B$$

が成立します．ここで，$P = P_\ell P_{\ell-1} \cdots P_1$ と置くと，

$$P\vec{a}_j = \vec{b}_j \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

となります．ここで B の具体的な形から

$$\vec{b}_3 = -\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2$$

であることが分かります．この式に P の正則性を考慮して P^{-1} を掛けると，

$$\vec{a}_3 = -\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2$$

を得ます．したがって $\mathrm{Im}(A)$ の元 $\vec{v} = \sum_{i=1}^{4} w_i\vec{a}_i$ は

$$\begin{aligned} \vec{v} &= w_1\vec{a}_1 + w_2\vec{a}_2 + w_3\vec{a}_3 + w_4\vec{a}_4 \\ &= w_1\vec{a}_1 + w_2\vec{a}_2 + w_3(-\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2) + w_4\vec{a}_4 \\ &= (w_1 - w_3)\vec{a}_1 + (w_2 - 2w_3)\vec{a}_2 + w_4\vec{a}_4 \end{aligned}$$

と，$\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\vec{a}_4$ と 3 本のベクトルで張られます．他方，$\vec{b}_1$，$\vec{b}_2$，$\vec{b}_4$ が線型独立であることが次のように示されます．

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_4\vec{a}_4 = \vec{0}$$

を仮定すると，この式に P を掛けて

$$c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + c_4\vec{b}_4 = \vec{0}$$

から $c_1 = c_2 = c_4 = 0$ が導かれます．よって $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，$\vec{a}_4$ は線型独立です（演習 5.4 参照)．

　まとめると，

(i) $\mathrm{Im}(A)$ は，a_1，a_2，a_4 で張られ，
(ii) a_1，a_2，a_4 は線型独立である

ことが示されました．このとき $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4$ は線型部分空間 $\mathrm{Im}(A)$ の**基底**であるといいます．

　基底については，節を改めた 5.1.3 節でさらに詳しく解説します．

演習 5.4. $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ とします．$P \in M_n(\mathbf{R})$ が正則であるとき

$$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \text{が線型独立} \Rightarrow P\vec{x}_1, \cdots, P\vec{x}_k \text{が線型独立}$$

を示しましょう．

演習 5.5. $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ が線型独立であるとします．また $Q \in M_k(\mathbf{R})$ が正則であるとします．このとき

$$(\vec{x}_1 \ \cdots \ \vec{x}_k)Q = (\vec{y}_1 \ \cdots \ \vec{y}_k)$$

とすると $\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_k \in \mathbf{R}^n$ が線型独立であることを示しましょう．

演習 5.6. $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ が線型独立であるとします．このとき $\vec{x}_1, \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_k \in \mathbf{R}^n$ が線型独立であることを示しましょう．

演習 5.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$ であるための a, b, c に関する条件を求めましょう．

演習 5.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ に対して $\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ となる条件を行列によって $B\vec{v} = \vec{0}$ と表しましょう.

演習 5.9. 次のベクトルの組み合わせが，線型独立か線型従属か判定しましょう.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

5.1.3　部分空間の基底・次元

5.1.2 節で基底に関して具体例を用いて説明しました．復習すると (5.1) で与えた 4 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4)$$

に関して **(i)** $\mathrm{Im}(A)$ は $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_4$ で生成され，**(ii)** $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_4$ は線型独立です.

この例を念頭において次の定義 5.4 を与えます.

定義 5.4. V を $\mathbf{R}^n$ の線型部分空間とします．このとき $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell$ が V の**基底**であるとは

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell \text{は } V \text{ を生成して,}$$

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell \text{は線型独立である}$$

ときです.

この定義 5.4 で与えた基底をなすベクトルの本数は V について一定であることを示します．具体的には次の定理 5.1 が成立します.