極大（小）の必要条件（補足）
Intro 2023 SL02 0417 Part 01

Nobuyuki TOSE

April 17, 2023

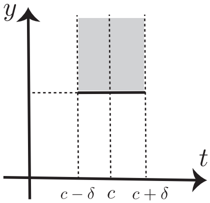
極大・極小の十分条件 (1 変数の場合)

定理（復習）

各点で微分可能な $f :]a,b[\to \mathbf{R}$ が $c \in]a,b[$ で極大（または極小）ならば

$$f'(c) = 0$$

$$
\begin{aligned}
& f(c) \text{ が極小値である} \\
\Leftrightarrow\ & \exists \delta > 0 \text{が存在して} \\
& c - \delta < t < c + \delta \quad \Rightarrow \quad f(t) \geq f(c)
\end{aligned}
$$



定理の逆は成立するか？

定理の**逆**は成立しません．

反例 $f(t) = t^3$ とすると $f'(t) = 3t^2$ なので $f'(0) = 0$ から $t = 0$ は f の停留点である．任意の $\delta > 0$ に対して

$$-\delta < t < 0 \Rightarrow f(t) < 0 = f(0)$$

であるので

$$-\delta < t < \delta \ \Rightarrow f(t) \geq f(0) = 0$$

を満たす正数 $\delta > 0$ は存在しません．従って f は $t = 0$ で極小ではありません．

他方，任意の $\delta > 0$ に対して

$$0 < t < \delta \Rightarrow f(0) = 0 < f(t)$$

であるので

$$-\delta < t < \delta \ \Rightarrow f(t) \leq f(0) = 0$$

を満たす正数 $\delta > 0$ は存在しません．従って f は $t = 0$ で極大ではありません．

極大・極小の十分条件

定理

$f :]a, b[\to \mathbf{R}$ が $]a, b[$ の各点で微分可能，f' も $]a, b[$ の各点で微分可能とします．さらに f'' が $]a, b[$ の各点で連続とします．このとき $t = c \in]a, b[$ において

$$f'(c) = 0, \quad f''(c) > 0 \quad (\text{resp. } f''(c) < 0)$$

ならば f は $t = c$ で極小（resp. 極大）となります．

この定理も最終的には証明します．

極大点・極小点であることの必要条件（復習）

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の関数

$$f: \ U \to \mathbf{R}$$

が U の各点 $\mathrm{P} \in U$ で x, y について偏微分できると仮定します.

Theorem

f が $\mathrm{P}_0(a, b) \in U$ で極小（極大）ならば

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0 \tag{1}$$

が成立します.

この状況で (1) を満たす点 $\mathrm{P}_0(a, b)$ を f の**停留点**と呼びます.

例–停留点であることは極大・極小の十分条件ではない

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

を考えましょう．

$$f_x(x, y) = 2x = 0, \quad f_y(x, y) = -2y = 0$$

から f の停留点は $(x, y) = (0, 0)$ です．

$$f(x, 0) = x^2, \quad f(0, y) = -y^2$$

から $(0, 0)$ で f は極大でも極小でもないことが分かります．

極大・極小の十分条件

定理

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の C^2 級関数 $f:\ U \to \mathbf{R}$ に対して $\mathrm{P}_0(a,b) \in U$ が停留点であるとします.

$$f_x(\mathrm{P}_0) = f_y(\mathrm{P}_0) = 0$$

(1) $\begin{vmatrix} f_{xx}(\mathrm{P}_0) & f_{xy}(\mathrm{P}_0) \\ f_{yx}(\mathrm{P}_0) & f_{yy}(\mathrm{P}_0) \end{vmatrix} > 0,\ f_{xx}(\mathrm{P}_0) > 0$ (resp. $f_{xx}(\mathrm{P}_0) < 0$)
であるならば P_0 で f は極小（resp. 極大）となります.

(2) $\begin{vmatrix} f_{xx}(\mathrm{P}_0) & f_{xy}(\mathrm{P}_0) \\ f_{yx}(\mathrm{P}_0) & f_{yy}(\mathrm{P}_0) \end{vmatrix} < 0$ ならば f は f は P_0 で f は極小でも極大でもありません.

今後当分の間この定理の証明をしながらいろんなことを学びます.