L05小テスト問題Ⅲから.

Ⅲ $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{p}\ \vec{q}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & -13 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & -7 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[\substack{2r\,+=\,1r\times(-3)\\ 3r\,+=\,1r\times 2\\ 4r\,+=\,1r\times 1}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & -5 & 15 & -10 \\ 0 & 7 & -21 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2r\times=(-\frac{1}{5})} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -21 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{1r\,+=\,2r\times(-2)\\ 3r\,+=\,2r\times(-7)}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

1, 2, 3列により $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{p} \iff x = 2,\ y = -3$

従って $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b} \in L(\vec{a}, \vec{b})$

1, 2, 4列により $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{q} \iff x = 3,\ y = 2$

従って $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b} \in L(\vec{a}, \vec{b})$

注　以上から

$$(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad ※$$

が成立する. 逆行列が分ったら

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

から ※ にかけて

$$(\vec{p}\ \vec{q}) \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})$$

と表わされる.

2次元部分空間(続)

一般論について

1° $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in L(\vec{a}, \vec{b}) \Longrightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in L(\vec{a}, \vec{b})$$

実際, $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in L(\vec{a}, \vec{b})$ なので

$$\vec{v}_1 = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = x_2 \vec{a} + y_2 \vec{b} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

と書ける

$$\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2)\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \left((\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$= \left((\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$= (\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}\right)$$

となる $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ とすると

$$\lambda v_1 + \lambda v_2 = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \xi \vec{a} + \eta \vec{b} \in L(\vec{a}, \vec{b})$$

2° $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ とすると

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ から

$$x\vec{a} + y\vec{b} = x'\vec{a} + y'\vec{b}$$

従って

$$(x - x')\vec{a} + (y - y')\vec{b} = \vec{o}$$

$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ なので $x - x' = y - y' = 0$ すなわち $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

N.B. $\varphi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} L(\vec{a}, \vec{b})$ は全単射となる.

3° $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ とする $\vec{\alpha} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$, $\vec{\beta} = x_2 + y_2\vec{b}$

とすると

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{b} \iff \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} = \vec{0} \iff (\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\iff (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\vec{a} \nparallel \vec{b}}{\iff} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

なので

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{b} \iff \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$$

$$\iff \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq \vec{0}$$

例1 $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -4 & 7 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \\ -2 & 3 & -13 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & -7 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

から $(\vec{\beta}\ \vec{\gamma}) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$\vec{a}, \vec{b}$ の第1, 第2成分を考えると $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ から

$$\vec{a} \nparallel \vec{b}$$

従って 3°より $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ から $\vec{\beta} \nparallel \vec{\gamma}$ が従う.

N.B. $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ のとき, 「$\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \neq 0$ である i, j が存在する」 $\iff \vec{a} \nparallel \vec{b}$

4° $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ として $\vec{\alpha} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$, $\vec{\beta} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$ とする.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow L(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = L(\vec{a}, \vec{b})$$

$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ なので $\xi\vec{\alpha} + \eta\vec{\beta} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ (1° による).

従って

$$L(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \subset L(\vec{a}, \vec{b})$$

$\forall \vec{v} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ をとると $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる.

$$(*) \quad (\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

が成立するが $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$ から $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ は正則である.

$(*)$ の両辺に $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}$ をかけると

$$\left((\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1} = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\text{左} = (\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}\right) = (\vec{a}\ \vec{b})I_2 = (\vec{a}\ \vec{b})$$

から

$$(\vec{a}\ \vec{b}) = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

これから $\vec{v} = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in L(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$

ここで $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とした.

例1.2 例1.1 の状況で $(\vec{p}\ \vec{q}) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ で $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$

なので

$$L(\vec{p}\ \vec{q}) = L(\vec{\alpha}\ \vec{\beta})$$

$\vec{v} \in L(\vec{a}\ \vec{b})$ とすると $\vec{v} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

これから

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

から $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ とその逆 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$