2変数2次多項式（続）

実対称行列 $A=\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ と $\vec{r}=\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$, $f\in\mathbb{R}$ を用いて, x, y の 2次多項式を

$$z=f(x,y)=\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)+\left(\vec{r}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)+f$$

とします. ここでは $\underline{A\neq O_2,\ |A|=ab-c^2=0}$ の場合を考えます.

A を回転行列 R によって $R^{-1}AR=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ と対角化します.

$$0=|A|=|R^{-1}AR|=\alpha\beta$$

から $\alpha=0$ OR $\beta=0$ が分かります. $\alpha=\beta=0$ のとき $R^{-1}AR=O_2$ 従って $A=O_2$ となりますから $\alpha\neq0$ or $\beta\neq0$ が成立することに注意します. 以下では

$$\underline{\alpha\neq0,\ \beta=0}$$

の場合を考えます. 回転座標変換を

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

とすると

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\left(R^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\left(R^{-1}AR\cdot R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$
$$=\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)=\alpha\xi^2$$

さらに

$$\left(\vec{r}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\left(R^{-1}\vec{r}, R^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\left(R^{-1}\vec{r}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)$$

となります. $R^{-1}\vec{r}=\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix}$ とすると

$$\left(\vec{r}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix} d' \\ e' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)=d'\xi+e'\eta$$

となります. 以上で

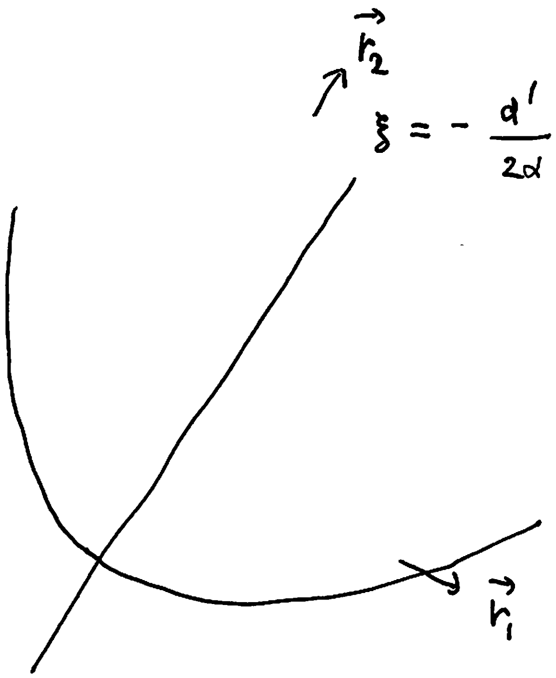
$$z = \alpha\xi^2 + d'\xi + e'\eta + f$$

と回転座標変換されます。

$e' \neq 0$ のとき。 等高線 $z = c$ について考えます。$e' \neq 0$ から

$$\eta = -\frac{\alpha}{e'}\xi^2 - \frac{d'}{e'}\xi - \frac{f-c}{e'}$$

と放物線ができます。



$$-\frac{\alpha}{e'} > 0$$

の場合の等高線は右図となります。

$e' = 0$ のとき。 等高線 $z = c$

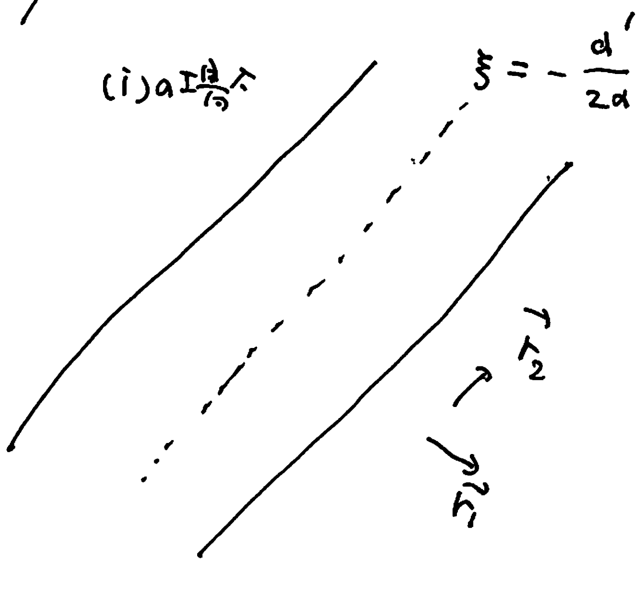
$$\alpha\xi^2 + d'\xi' + (f-c) = 0$$

となりますが、判別式、

(i) $D = d'^2 - 4\alpha(f-c) > 0$ のとき

$$\xi = \frac{-d' \pm \sqrt{D}}{2\alpha}$$

の2直線



(i)の場合

(ii) $D = 0$ のとき

$$\xi = -\frac{d'}{2\alpha}$$

の1直線

(iii) $D < 0$ のとき

空集合。

となります。