行列超入門(その2)

復習と少しの拡張

行列×列ベクトル

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{K}^n$ とします.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} \vdots \\ b_i \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \vdots \\ c_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

とすると

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := x\vec{a} + y\vec{b} = \begin{pmatrix} \vdots \\ x a_i + y b_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ (a_i\ b_i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \begin{pmatrix} \vdots \\ x a_i + y b_i + z c_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ (a_i\ b_i\ c_i)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

となる. これを4列, … の行列に拡張できるだろう.

行列×行列(その1)

1° $X = (\vec{a}\ \vec{b})$, $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r} \in \mathbb{K}^2$ のとき. $X\vec{p}, X\vec{q}, X\vec{r} \in \mathbb{K}^n$ が定義できる.

$$X(\vec{p}\ \vec{q}) := (X\vec{p}\ \ X\vec{q}) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ (a_i\ b_i)\vec{p} & (a_i\ b_i)\vec{q} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

と n行2列の行列が定義できる.

$$X(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) := (X\vec{p}\ \ X\vec{q}\ \ X\vec{r}) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_i\ b_i)\vec{p} & (a_i\ b_i)\vec{q} & (a_i\ b_i)\vec{r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

と n行3列の行列が定義できる.

さらに $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l \in \mathbb{K}^2$ のとき.

$$X(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_l) := (X\vec{p}_1 \cdots X\vec{p}_j \cdots X\vec{p}_l)$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_i\ b_i)\vec{p}_1 & \cdots & (a_i\ b_i)\vec{p}_j & \cdots & (a_i\ b_i)\vec{p}_l \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

と n 行 2 列の行列ができる.

$$\boxed{n\text{行}2\text{列} \times 2\text{行}\ell\text{列} = n\text{行}\ell\text{列}}$$

2° 1°の状況で

$$X(\vec{p}+\vec{q}) = X\vec{p} + X\vec{q}, \quad X(\lambda\vec{p}) = \lambda(X\vec{p})$$

証明は Presentation にある. これをまとめると

$$X(\lambda\vec{p}+\mu\vec{q}) = \lambda(X\vec{p}) + \mu(X\vec{q})$$

となる（線形性）最後の式は

$$X\left((\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}\right) = (X\vec{p}\ X\vec{q})\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$$
$$= (X(\vec{p}\ \vec{q}))\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}$$

と結合法則を書くことができる.

3° 2°をさらに拡張する.

$X=(\vec{a}\ \vec{b})$, $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell \in \mathbb{K}^2$ とする.

$$X(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3) = X((\vec{p}_1+\vec{p}_2)+\vec{p}_3) = X(\vec{p}_1+\vec{p}_2) + X\vec{p}_3$$
$$= X\vec{p}_1 + X\vec{p}_2 + X\vec{p}_3$$

帰納的には

$$X(\vec{p}_1+\cdots+\vec{p}_{n-1}+\vec{p}_\ell) = X(\vec{p}_1+\cdots+\vec{p}_{\ell-1}) + X\vec{p}_\ell$$
$$= X\vec{p}_1+\cdots+X\vec{p}_{\ell-1}+X\vec{p}_\ell$$

さらに

$$X(\lambda_1\vec{p}_1+\cdots+\lambda_l\vec{p}_l)=X(\lambda_1\vec{p}_1)+\cdots+X(\lambda_l\vec{p}_l)$$
$$=\lambda_1(X\vec{p}_1)+\cdots+\lambda_l(X\vec{p}_l)$$

これは
$$X\left((\vec{p}_1\cdots\vec{p}_l)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_l\end{pmatrix}\right)=(X\vec{p}_1\cdots X\vec{p}_l)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_l\end{pmatrix}$$
$$=\left(X(\vec{p}_1\cdots\vec{p}_l)\right)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_l\end{pmatrix}$$

と結合則が導かれる.

> X : n行k列, P : k行l列, $\vec{c}\in K^l$ に対して
>
> $$(XP)\vec{c}=X(P\vec{c})$$

4°

X : n行k列, P : k行l列 $C=(\vec{c}_1\cdots\vec{c}_m)$ l行m列

であるとき

$$(XP)C=X(PC)$$

(証)
$$=((XP)\vec{c}_1\cdots(XP)\vec{c}_m)=(X(P\vec{c}_1)\cdots X(P\vec{c}_m))$$
$$=X(P\vec{c}_1\cdots P\vec{c}_m)=X(P(\vec{c}_1\cdots\vec{c}_m))$$
$$=X(PC)$$

行列×行列（その2）

1° $X=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$, $\vec{p},\vec{q},\vec{r}\in\mathbb{K}^3$. このとき $X\vec{p}, X\vec{q}, X\vec{r}$ が定義できる。

$$X(\vec{p}\ \vec{q}) := (X\vec{p}\ X\vec{q}) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ (a_i\ b_i\ c_i)\vec{p} & (a_i\ b_i\ c_i)\vec{q} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r}) &:= (X\vec{p}\ X\vec{q}\ X\vec{r}) \\ &= \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_i\ b_i\ c_i)\vec{p} & (a_i\ b_i\ c_i)\vec{p} & (a_i\ b_i\ c_i)\vec{q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と n行2列, n行3列の行列が定義できる。

さらに $\vec{p}_1,\cdots,\vec{p}_\ell\in\mathbb{K}^3$ のとき

$$\begin{aligned} X(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_\ell) &:= (X\vec{p}_1 \cdots X\vec{p}_j \cdots X\vec{p}_\ell) \\ &= \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (a_i\ b_i\ c_i)\vec{p}_1 & \cdots & (a_i\ b_i\ c_i)\vec{p}_j & \cdots & (a_i\ b_i\ c_i)\vec{p}_\ell \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と n行ℓ列の行列が定義される。

$$\boxed{\text{n行3列} \times \text{3行ℓ列} = \text{n行ℓ列}}$$

2° 1°の状況で

$$X(\vec{p}+\vec{q}) = X\vec{p}+X\vec{q}, \quad X(\lambda\vec{p}) = \lambda(X\vec{p})$$

実際

$$\text{(I)} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} p_1+q_1 \\ p_2+q_2 \\ p_3+q_3 \end{pmatrix}$$

$$= (p_1+q_1)\vec{a} + (p_2+q_2)\vec{b} + (p_3+q_3)\vec{c}$$

$$= (p_1\vec{a} + p_2\vec{b} + p_3\vec{c}) + (q_1\vec{a} + q_2\vec{b} + q_3\vec{c})$$

$$= (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{p} + (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{q}$$

$$= X\vec{p} + X\vec{q}$$

$$X(\lambda\vec{p}) = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} \lambda p_1 \\ \lambda p_2 \\ \lambda p_3 \end{pmatrix} = (\lambda p_1)\vec{a} + (\lambda p_2)\vec{b} + (\lambda p_3)\vec{c}$$

$$= \lambda(p_1\vec{a}) + \lambda(p_2\vec{b}) + \lambda(p_3\vec{c})$$

$$= \lambda(p_1\vec{a} + p_2\vec{b} + p_3\vec{c}) = \lambda\left((\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\vec{p}\right)$$

$$= \lambda(X\vec{p})$$

3° 2°を拡張する.

$X = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$, $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell \in \mathbb{K}^3$ とすると 帰納的に

$$X(\vec{p}_1 + \cdots + \vec{p}_{\ell-1} + \vec{p}_\ell) = X(\vec{p}_1 + \cdots + \vec{p}_{\ell-1}) + X\vec{p}_\ell$$

$$= X\vec{p}_1 + X\vec{p}_2 + \cdots + X\vec{p}_{\ell-1} + X\vec{p}_\ell$$

さらに

$$X(\lambda_1\vec{p}_1 + \cdots + \lambda_\ell\vec{p}_\ell)$$

$$= X(\lambda_1\vec{p}_1) + \cdots + X(\lambda_\ell\vec{p}_\ell)$$

$$= \lambda_1(X\vec{p}_1) + \cdots + \lambda_\ell(X\vec{p}_\ell)$$

これは $X\left((\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_\ell)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_\ell \end{pmatrix}\right) = (X\vec{p}_1 \cdots X\vec{p}_\ell)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_\ell \end{pmatrix}$

$$= \left(X(\vec{p}_1 \cdots \vec{p}_\ell)\right)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_\ell \end{pmatrix}$$

まとめ　X : n 行 s 列，P : s 行 ℓ 列，$\vec{c} \in \mathbb{K}^{\ell}$ に対して

$$(XP)\vec{c} = X(P\vec{c})$$

4°　X : n 行 s 列，P : s 行 ℓ 列，$C = (\vec{c}_1 \cdots \vec{c}_m)$ ℓ 行 m 列とするとき

$$(XP)C = X(PC)$$

実際　左 $= ((XP)\vec{c}_1 \cdots (XP)\vec{c}_m)$

$$\underset{3^\circ}{=} (X(P\vec{c}_1) \cdots X(P\vec{c}_m))$$

$$= X(P\vec{c}_1 \cdots P\vec{c}_m) = X(PC)$$

完全に一般化するのは X の列数の一般化．（§2 の最初で示す）