線型写像 F の $\det(F)$ と $\Phi_F(\lambda)$

MSF23L05 の小テスト問題IV の状況で考えます.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

とします. $V := L(\vec{a}, \vec{b})$ とします. $\vec{a}, \vec{b}$ の第1, 2成分を考えると $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ なので

$$\vec{a} \nparallel \vec{b}$$

が成立する. この状況で線型部分空間 V の基底として $\vec{a}, \vec{b}$ がとれるので $\dim V = 2$ が従う.

- $V (\subset \mathbb{K}^n)$ が (線型) 部分空間とは

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V, \lambda \vec{v}_1 \in V$$

が成立するときである.

問 $L(\vec{a}, \vec{b})$ が $\mathbb{R}^4$ の (線型) 部分空間であることを示せ.

- V が $\mathbb{K}^n$ の部分空間であるとします. $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_\ell \in V$ が V の基底であるとは

$$\text{(i) } \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_\ell \text{ は LI}, \quad \text{(ii) } V = L(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_\ell)$$

が成立するときである.

- (次元の定義) V が $\mathbb{K}^n$ の部分空間であるとする(*).

定理1 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\ell \in V$ が V の基底, $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m \in V$ が V の基底

$$\Rightarrow \ell = m$$

(*) $V \neq \{\vec{0}\}$ とした方がよい. $\dim \{\vec{0}\} = 0$ と定義する

(証明) $\vec{v}_* \in V = L(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_\ell)$ なので

$$\vec{v}_* = (\vec{w}_1 \cdots \vec{w}_m)\begin{pmatrix} a_{1*} \\ a_{2*} \\ \vdots \\ a_{m*} \end{pmatrix}$$

なので $(\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_j \cdots \vec{v}_\ell) = (\vec{w}_1 \cdots \vec{w}_m)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{m\ell} \end{pmatrix}$

となる。$A = (a_{ij})$ は m 行 ℓ 列である。

$\boxed{m < \ell \text{ ならば } A\vec{x} = \vec{0} \text{ には非自明解が存在する.}}$

これを使うと $A\vec{x} = \vec{0}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ を満たす $\vec{x} \in \mathbb{K}^\ell$ に対して

$$(\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_\ell)\vec{x} = \vec{0}$$

となるが、これは $\vec{x} \neq \vec{0}$ なので $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\ell$ がLIなので起こらない。

従って $m \geq \ell$.　　　　(証る)　点は最後に

このMSF23L05QIVの終りに受けた小テストでは

$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}) \to \cdots \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

と行基本変形できた。$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ なので $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 従って

$\vec{c} \nparallel \vec{d}$

であることが分かります。

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 2\vec{b},\ \vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b} \text{ なので}$$

$$\vec{c}, \vec{d} \in L(\vec{a}, \vec{b})$$

が分かります。$\xi\vec{c} + \eta\vec{d} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

従って $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ とすると $\xi\vec{c} + \eta\vec{d} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in L(\vec{a}, \vec{b})$

これから $L(\vec{c},\vec{d}) \subset L(\vec{a},\vec{b})$ が分かります。さらに

$$L(\vec{c},\vec{d}) = L(\vec{a},\vec{b})$$

が分かります。ここでは 2 通りの証明をします。

(i) $(\vec{c}\ \vec{d}) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ で $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ から $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ は正則です。これから

$$(\vec{a}\ \vec{b}) = (\vec{c}\ \vec{d})\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (\vec{c}\ \vec{d})\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

が分かるので $\vec{a},\vec{b} \in L(\vec{c},\vec{d})$ 従って

$$L(\vec{a},\vec{b}) \subset L(\vec{c},\vec{d})$$

が分かります。

(ii) <u>別の議論</u> $L(\vec{c},\vec{d}) \subsetneqq L(\vec{a},\vec{b})$ とします。このとき

$\exists \vec{f} \in L(\vec{a},\vec{b})$ $\vec{f} \notin L(\vec{c},\vec{d})$ が従います。このとき

$$\vec{c},\vec{d},\vec{f} \text{ は LI}$$

が従います。以下の一般論を思い出そう。

> 一般に $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{K}^n$, $\vec{x} \nparallel \vec{y}$ とするとき、
>
> $$\vec{z} \notin L(\vec{x},\vec{y}) \Longleftrightarrow \vec{x},\vec{y},\vec{z} \text{ は LI}$$

問 これを証明しましょう。
ところが 次の<u>一般論</u>も成立します。

> <u>定理 2</u> $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\vec{y}_1,\vec{y}_2 \in \mathbb{K}^n$ に対して
>
> $$\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3 \in L(\vec{y}_1,\vec{y}_2) \Longrightarrow \vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3 \text{ は LD}$$

以下の議論はすでに一般化が出ていますが、繰り返しましょう。

$$(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3) = (\vec{y}_1\ \vec{y}_2)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

と $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ を $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ の定数倍として表わします．このとき．

$\exists \begin{pmatrix}\alpha \\ \beta \\ \gamma\end{pmatrix} \neq \vec{0}$　$C\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta \\ \gamma\end{pmatrix} = \vec{0}$ これから $(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta \\ \gamma\end{pmatrix} = \vec{0}$ となります．

（定理証了）

定理を使うと

$\vec{c}, \vec{d}, \vec{f}$ はLD.

と矛盾が生じます．だから $L(\vec{c}, \vec{d}) \subsetneq L(\vec{a}, \vec{e})$ は成立しません．

従って　$\underline{L(\vec{c}, \vec{d}) = L(\vec{a}, \vec{e})}$

ここで一般論としてまとめておきます．

<u>定理3</u> $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_l \in L(\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_m)$ とします．$(\vec{v}_*, \vec{w}_* \in \mathbb{K}^n)$

このとき $(l > m \Rightarrow \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_l$ はLD.$)$ およびその対偶

$(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_l$ がLI $\Rightarrow l \leq m)$

証明は定理1の証明そのものです．

<u>定理4</u> $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_l \in \mathbb{K}^n$ はLIとします．$\vec{f} \in \mathbb{K}^n$ に対して

$L(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_l) \not\ni \vec{f} \iff \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_l, \vec{f}$ はLI

<u>問</u> 定理4を証明しましょう．

例に戻ります. $\vec{v} \in L(\vec{a},\vec{b}) = L(\vec{c},\vec{d})$ に対して

$$\vec{v} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (\vec{c}\ \vec{d})\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$$

と $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ で一意的に表わされます. ($\vec{a}\nparallel\vec{b}$, $\vec{c}\nparallel\vec{d}$ に注意!) $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を基底 $\vec{a},\vec{b}$ による座標, $\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$ を基底 $\vec{c},\vec{d}$ による座標と呼びます.

$$(\vec{c}\ \vec{d}) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}2&3\\-2&1\end{pmatrix}$$

から $(\vec{c}\ \vec{d})\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}2&3\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

となるので $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&3\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}$

さらに $\begin{pmatrix}2&3\\-2&1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\end{pmatrix}$ から

$$\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}1&-3\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

が従います. 以下 変換行列 $P = \begin{pmatrix}2&3\\-2&1\end{pmatrix}$ を用います.

線型写像 $V := L(\vec{a},\vec{b})$ として線型写像

$$F : V \longrightarrow V$$

を $F(\vec{a}) = 2\vec{a} - \vec{b}$, $F(\vec{b}) = -3\vec{a} + 4\vec{b}$ が成立するように定義します. このとき

定義域と値域が一致する写像を変換と呼びます.

$$F(x\vec{a} + y\vec{b}) = xF(\vec{a}) + yF(\vec{b})$$

$$= x(2\vec{a} - \vec{b}) + y(-3\vec{a} + 4\vec{b})$$

$$= (2\vec{a} - \vec{b}\ \ \ -3\vec{a} + 4\vec{b})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$= (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$x'\vec{a} + y'\vec{b} = F(x\vec{a} + y\vec{b})$ とすると

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

となります。$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$ 座標では $\begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix}$ を基底 $\vec{a}, \vec{b}$ による表現行列と呼びます。

$$\begin{pmatrix}\xi'\\ \eta'\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

となります。

$$\det\begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix} = \det\left(P^{-1}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix}P\right)$$

なので $\det(F) := \det\begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix} = 5.$

と定めます。V の基底の取り方に依らず値が定まることに注意しましょう。

$$\Phi_F(\lambda) := \det\left(\lambda I_2 - \begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix}\right) = \Phi_{\begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix}}(\lambda)$$

と定めますが

$$\Phi_{P^{-1}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix}P}(\lambda) = \Phi_{\begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix}}(\lambda)$$

から基底の選び方によらず固有多項式が定まります。$A = \begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix}$ とすると

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix}\lambda-2 & 3\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda-1)(\lambda-5)$$

<u>$\lambda=1$ のとき</u> $A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1&3\\1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - 3y = 0$

から $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3y\\ y\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}\ (y \neq 0)$ から

$$F(3\vec{a}+\vec{b}) = 3\vec{a}+\vec{b}$$

<u>$\lambda=5$ のとき</u> $A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}3&3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x + y = 0$

から $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\ y\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\ (y \neq 0)$ から

$$F(-\vec{a}+\vec{b}) = 5(-\vec{a}+\vec{b})$$

$\vec{p}=3\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=-\vec{a}+\vec{b}$ とすると $(\vec{p}\ \vec{q})=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}$

で $\begin{vmatrix}3&-1\\1&1\end{vmatrix}=4\neq 0$ から $\vec{p}\nparallel\vec{q}$ が従います. これから $\vec{p},\vec{q}$ はVの

基底で 座標を $\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}$ とします.

$$
\begin{aligned}
(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}s'\\t'\end{pmatrix} &= F(s\vec{p}+t\vec{q})\\
&= sF(\vec{p})+tF(\vec{q}) = s\cdot\vec{p}+t\cdot 5\vec{q}\\
&= (\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{pmatrix}s'\\t'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix}
$$

と表現されます. <u>対角行列に表現される線型変換を対角型</u>

<u>と呼びます.</u>

<u>問題</u>　MSF23期末テスト問題IIの状況で考えます.

$$
\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\-4\\-1\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\-3\\-2\\-4\end{pmatrix},\ \vec{p}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\\4\end{pmatrix},\ \vec{q}=\begin{pmatrix}5\\6\\1\\9\end{pmatrix},\ \vec{r}=\begin{pmatrix}3\\1\\-2\\1\end{pmatrix}
$$

とします. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ はLIで, $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ もLIで

$$
(\vec{p}\ \vec{q}\ \vec{r})=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}3&7&4\\-1&-2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}
$$

が成立します. このとき $L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=L(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$ が成立します.

(1)　$V:=L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ として線型変換

$$
F:V\longrightarrow V
$$

を $F(\vec{a})=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$, $F(\vec{b})=2\vec{b}+2\vec{c}$, $F(\vec{c})=-\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$

となるように定めます. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が定める座標を $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$,

$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が定める座標を $\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ とするとき F を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix}$ で表現しましょう.

(2) $\Phi_F(\lambda)$ を求めて, 各固有値の固有ベクトルを求めましょう.

(3) F が対角行列で表現されるように V の基底を求めましょう.