1) $A \in M_3(\mathbb{K})$ に対して

$$A \text{ 正則} \iff \left(A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \right) \iff |A| \neq 0$$

を示した。

2) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$\text{(i)}\ \vec{a} \nparallel \vec{b} \overset{\text{(ii)}}{\iff} (\vec{a}\ \vec{b}) \to \cdots \to (\vec{e}_1\ \vec{e}_2) \text{ と行基本変形できる} \overset{\text{(iii)}}{\iff} \exists i\, \exists j \text{ に対して } \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} \neq 0$$

も示した。

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{K}^n$ に対して $(n \geq 3)$

$$\text{(i)}\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は LI} \overset{\text{(ii)}}{\iff} (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \to \cdots \to (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$$

$$\underset{(*)}{\overset{\text{(iii)}}{\iff}} \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix} \neq 0$$

も成立する。 (i) $\Rightarrow$ (iii) を示せばよい。 (2) の (i) $\Rightarrow$ (iii) と同様に示せる)

4) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{K}^2$ は LD. (いろいろ示せる)

5) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{K}^3$ は LD.

3)について

(i) ⇒ (iii)　$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は L.I なので $\vec{a} \neq \vec{0}$，従ってある i に対して $a_i \neq 0$

$$X_0 = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = \begin{pmatrix} \vdots \\ x_* \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & & \\ a_i & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ a_i & & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix} = X_1$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \\ 0 & & \\ a_i & b_i' & c_i' \\ 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ y_* \\ \vdots \end{pmatrix}$$ とする　$j, k \neq i$ に対して

$$\begin{vmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{vmatrix}$$ となる．

$X_1 = (\vec{a}_1\ \vec{b}_1\ \vec{c}_1)$ とるりベクトル表示をすると

$\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}_1$ は L.I となる．特に $\vec{a}_1 \nparallel \vec{b}_1$ である．従って $\exists j \neq i$ $b_j' \neq 0$

これを用いて上と下を消すと

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1'' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & c_{j-1}'' \\ 0 & & \\ 0 & b_j' & c_j' \\ 0 & 0 & c_{j+1}'' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{i-1}'' \\ a_i & 0 & c_i'' \\ 0 & 0 & c_{i+1}'' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & c_n'' \end{pmatrix}$$

このとき $X_2 = \begin{pmatrix} \vdots \\ z_* \\ \vdots \end{pmatrix}$ とすると

$k \neq i, j$ のとき

$$\begin{vmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_i \\ z_j \\ z_k \end{vmatrix}$$

$X_2 = (\vec{a}_2\ \vec{b}_2\ \vec{c}_2)$ とるりベクトル表示をすると $\vec{a}_2, \vec{b}_2, \vec{c}_2$ は L.I で

$c_k'' \neq 0$ である $k (\neq i, j)$ が存在する．これを用いると

$$X_2 \to \cdots \to \begin{pmatrix} & \vdots & \\ 0 & b_j' & 0 \\ & \vdots & \\ a_i & 0 & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & 0 & c_k'' \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$ となり

$$\begin{vmatrix} z_i \\ z_j \\ z_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_i & 0 & 0 \\ 0 & b_j' & 0 \\ 0 & 0 & c_k'' \end{vmatrix} = a_i b_j' c_k'' \neq 0$$

が分かる．

注　3)はさらに一般化される．これでも十分だろうが，先が読める

4) について

(その1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ のとき ${}^\exists\binom{x}{y} \neq \vec{0}$ に対して $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ このとき.
$x\vec{a}+y\vec{b}+0\vec{c}=\vec{0}$ で $x \neq 0$ or $y \neq 0$ なので $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ はLD.

$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ のとき. $(\vec{a}\ \vec{b})$ は正則 となるので

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0} \iff (\vec{a}\ \vec{b})\binom{x}{y} = -z\vec{c}$$

は $\binom{x}{y} = -z(\vec{a}\ \vec{b})^{-1}\vec{c}$ となる. $z=1$ とすると $\binom{x}{y} = -(\vec{a}\ \vec{b})^{-1}\vec{c}$
となる. これが $\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ となるので $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ はLDであることが
分かる.

または $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \to \cdots \to \begin{pmatrix}1&0&\alpha\\0&1&\beta\end{pmatrix}$ となるが

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0} \iff \begin{cases} x \quad +\alpha z = 0 \\ \quad y+\beta z = 0 \end{cases}$$

$z=1,\ x=-\alpha,\ y=-\beta$ が非自明な解である.

(その2) $\vec{a}=\vec{0}$ のとき　$1\cdot\vec{0}+0\cdot\vec{b}+0\vec{c}=\vec{0}$ より $\vec{0},\vec{b},\vec{c}$ はLD.

$\vec{a} \neq 0$ のとき

$a_1 \neq 0$ のとき. $\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ 0 & *_2 & \#_2\end{pmatrix}$
となる.

$*_2 y + \#_2 z = 0$ を満たす $\binom{y}{z} \neq \vec{0}$ が存在する.

実際 $\binom{*_2}{\#_2} \neq \vec{0}$ のとき $*_2(-\#_2)+\#_2\cdot *_2 = 0$ で $\binom{y}{z} = \binom{-\#_2}{*_2}$
が非自明解である. $\binom{*_2}{\#_2} = \vec{0}$ のときは自明である $\boxed{\text{[illegible]}}$

$*_2 y + \#_2 z = 0$ の非自明解 $\binom{y}{z} = \binom{y_0}{z_0}$ を用いて

$$x = -\frac{1}{a_1}(b_1 y_0 + c_1 z_0)$$

とすればよい.

$a_1 = 0$ のとき $\vec{a} \neq \vec{0}$ なので $a_2 \neq 0$ となる

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix}$$

とすると $a_1 \neq 0$ の場合に帰着(きちゃく)できる。

(その3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ のとき (その1) と同様に非自明解が存在することが分かる。

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ のとき。 2×2 行列 B に対して

$$\boxed{B \text{ 正則} \iff (B\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}) \iff |B| \neq 0}$$

から $\boxed{|B| = 0 \iff \exists \vec{v} \neq 0 \quad B\vec{v} = \vec{0}}$

これを用いると $\exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ これから

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{で} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

(その4) $\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ or } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ or } \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0}$

のとき (その3) と同様に $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ に非自明解が存在する。

この条件を否定すると $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ が分かる。

これから $s\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$ で $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ を満たす s, t が存在する。

<u>$s \neq 0$ のとき</u> $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = -\frac{t}{s}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のは上に同様な説明がある。

となるので $a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$ に非自明解が存在する

<u>$t \neq 0$</u> この場合も同様。

5) について (その1) ⑤

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が LD のとき $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ かつ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\neq\vec{0}$

を満たす $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^3$ が存在する.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が LI のとき $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ は正則で

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+w\vec{d}=\vec{0} \iff (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-w\vec{d}$$

で $w=1$ とおいて $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})^{-1}\vec{d}$ とすればよい.

または $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\to\cdots\to(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)$ と行基本変形できることを用いると

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})\to\cdots\to\left(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3\ \begin{matrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{matrix}\right)$$

と行基本変形できる. これから

$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+w\vec{d}=\vec{0} \iff \begin{cases}x=-\alpha w\\ y=-\beta w\\ z=-\gamma w\end{cases}$$

となるので $w=1$, $x=-\alpha$, $y=-\beta$, $z=-\gamma$ が非自明解.

(その2) $\vec{a}=\vec{0}$ のとき $1\cdot\vec{0}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}+0\vec{d}=\vec{0}$ なのでOK.

$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき $\exists j$ に対して $a_j\neq 0$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})\to\cdots\to\begin{pmatrix}a_j & b_j\ \ c_j\ \ d_j\\ \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \boxed{\quad F\quad}\end{pmatrix}$$

とできる. F は 2行3列なので $\exists\begin{pmatrix}y_0\\z_0\\w_0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ $F\begin{pmatrix}y_0\\z_0\\w_0\end{pmatrix}=\vec{0}$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\vec{0} \iff \begin{cases}a_jx+b_jy+c_jz+d_jw=0\\ F\begin{pmatrix}y\\z\\w\end{pmatrix}=\vec{0}\end{cases}$$

$a_j\neq 0$ なので $x_0:=-\dfrac{1}{a_j}(b_jy_0+c_jz_0+d_jw_0)$ とおくと

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\\w_0\end{pmatrix}=\vec{0}$$ が分かる.

一般論 $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1} \in \mathbb{K}^n$ は LD

$\vec{a}_1 = \vec{0}$ のとき $1 \cdot \vec{0} + 0\vec{a}_2 + \cdots + 0\vec{a}_{n+1} = \vec{0}$ から OK.

$\vec{a}_1 \neq \vec{0}$ のとき, $\exists j \quad a_{j1} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{j1} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix} & \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_n \ \vec{a}_{n+1} \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{j\,n+1} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{\quad F \quad} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

と行基本変形できる. F は (n−1) 行 n 列 なので 帰納法の仮定を用いれば

$$F\begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

を満たす $\begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ が存在する. $a_{j1} \neq 0$ なので

$$x_1 := -\frac{1}{a_{j1}}\left(a_{j2}x_2 + \cdots + a_{j\,n+1}x_{n+1}\right)$$

とおくと

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ で } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

となる.

注

近く $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell \in \mathbb{K}^n$ に対して

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_\ell$ が LI $\iff$ $(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_\ell) \to \cdots \to (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_\ell)$

を示します. これを用いると

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ が LI の場合 (LD の場合は処理できるでしょう)

$(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n \ \vec{a}_{n+1}) \to \cdots \to (I_n \mid \vec{\beta})$

となるので $x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n + x_{n+1}\vec{a}_n = \vec{0} \iff \begin{cases} x_1 = x_{n+1}\beta_1 \\ \vdots \\ x_n = x_{n+1}\beta_n \end{cases}$

となるので $x_1 = \beta_1, \dots, x_n = \beta_n, x_{n+1} = 1$ が非自明解.