線形写像.

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ を m行n列 とします. このとき,

$$F_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$\vec{x} \longmapsto A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

を A が定める線形写像と呼びます. この線形性はどのような意味だろうか.

一般に写像

$$F : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

が線形とは $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$, $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して

$$(*)\begin{cases} F(\vec{x}+\vec{y}) = F(\vec{x}) + F(\vec{y}) \\ F(\lambda\vec{x}) = \lambda F(\vec{x}) \end{cases}$$

が成立する場合です. $(*)$ は

$$F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$$

と同値です. F_A は

$$\begin{aligned} F_A(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) &= A(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) \\ &= \lambda(A\vec{x}) + \mu(A\vec{y}) \\ &= \lambda F_A(\vec{x}) + \mu F_A(\vec{y}) \end{aligned}$$

と線形写像であることが分かります.

逆に一般の線形写像は行列の積で表現されます.

$$F : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

は線形とします.

$\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_\ell$ に対して

$$F(\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{\ell-1} + \vec{x}_\ell)$$

$$= F(\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_{\ell-1}) + F(\vec{x}_\ell)$$

$$= F(\vec{x}_1) + \cdots + F(\vec{x}_{\ell-1}) + F(x_\ell)$$

さらに

$$\left.\begin{aligned} & F(\lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_\ell \vec{x}_\ell) \\ &= F(\lambda_1 \vec{x}_1) + \cdots + F(\lambda_\ell \vec{x}_\ell) \\ &= \lambda_1 F(\vec{x}_1) + \cdots + \lambda_\ell F(\vec{x}_\ell) \end{aligned}\right) \quad (\#)$$

が分かります. 特に

$$F(\vec{x}) = F(x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_n \vec{e}_n)$$

$$= x_1 F(\vec{e}_1) + \cdots + x_n F(\vec{e}_n)$$

$$= (F(\vec{e}_1) \cdots F(\vec{e}_n)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= F_A(\vec{x})$$

と m行n列の 行列 $A = (F(\vec{e}_1) \cdots F(\vec{e}_n))$ を用いて表せます

N.B. より (#) は

$$F((\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_\ell)\vec{\lambda}) = (F(\vec{x}_1) \cdots F(\vec{x}_\ell))\vec{\lambda}$$

と表現できます.

$G : \mathbb{K}^n \longrightarrow (\mathbb{K}^m)^*$ が線型であるとは

$$G(\vec{x}+\vec{y}) = G(x) + G(y), \quad G(\lambda\vec{x}) = \lambda G(\vec{x})$$

が成立するときです.

例 $\quad {}^t(\cdot) : \mathbb{K}^n \longrightarrow (\mathbb{K}^n)^*$
$\qquad \vec{x} \longmapsto {}^t\vec{x}.$

は線型です. 実際

$${}^t(\vec{x}+\vec{y}) = {}^t\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = (x_1+y_1 \cdots x_n+y_n)$$
$$= (x_1 \cdots x_n) + (y_1 \cdots y_n)$$
$$= {}^t\vec{x} + {}^t\vec{y}$$
$${}^t(\lambda\vec{x}) = {}^t\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} = (\lambda x_1 \cdots \lambda x_n)$$
$$= \lambda(x_1 \cdots x_n) = \lambda\, {}^t(\vec{x})$$

から分かります.

G について考えると $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_l \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$G(\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_l\vec{x}_l) = \lambda_1 G(\vec{x}_1) + \cdots + \lambda_l G(\vec{x}_l) \quad (*)$$

が成立します.

行ベクトル $a_1, \cdots, a_l \in (\mathbb{K}^m)^*$ に対して

$$(\lambda_1 \cdots \lambda_l)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{pmatrix} = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_l a_l$$

が成立することを近く説明します. これを用いると $(*)$ は

$(\mathbb{K}^n)^*$ は n 次元行ベクトル全体の集合です.

$$G((\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_\ell)\vec{\lambda}) = {}^t\vec{\lambda}\begin{pmatrix} G(\vec{x}_1) \\ \vdots \\ G(\vec{x}_\ell) \end{pmatrix}$$

を意味します. $G = {}^t(-)$ とすると $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_\ell \in \mathbb{R}^n$ に対して

$${}^t(\lambda_1\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_\ell \vec{x}_\ell) = (\lambda_1 \cdots \lambda_\ell)\begin{pmatrix} {}^t\vec{x}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{x}_\ell \end{pmatrix}$$

i.e. $${}^t((\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_\ell)\vec{\lambda}) = {}^t\vec{\lambda}\begin{pmatrix} {}^t\vec{x}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{x}_\ell \end{pmatrix}$$

これは

$X = (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_\ell)$ を n 行 ℓ 列とするとき $\vec{\lambda} \in \mathbb{K}^\ell$ に対して

$$\boxed{{}^t(X\vec{\lambda}) = {}^t\vec{\lambda}\ {}^tX}$$

を意味します. さらに ℓ 行 m 列の $Y = (\vec{y}_1 \cdots \vec{y}_m)$ に対して

$$\begin{aligned}
{}^t(XY) &= {}^t(X\vec{y}_1 \ \cdots \ X\vec{y}_\ell) \\
&= \begin{pmatrix} {}^t(X\vec{y}_1) \\ \vdots \\ {}^t(X\vec{y}_m) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} {}^t\vec{y}_1\ {}^tX \\ \vdots \\ {}^t\vec{y}_m\ {}^tX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{y}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{y}_m \end{pmatrix} {}^tX \\
&= {}^tY\ {}^tX
\end{aligned}$$

が従います.