# 数理科学基礎2023年度　V001,20230329

戸瀬信之

# 第1章　形式論理，集合，写像

## 1.1　命題

**命題**とは**真** (True) か**偽** (False) がはっきりしている文のことです.

$$1 < 2$$

は真であり

$$1 > 2$$

は偽です.

$P_1$ と $P_2$ が命題であるとします. $P_1$ かつ $P_2$ $(P_1 \wedge P_2)$ が真であるのは $P_1$ と $P_2$ の両方が真のときです. このことを**真理表** (**真偽表**) (truth table) と呼ぶ次の表で表します.

| $P_1$ | $P_2$ | $P_1 \wedge P_2$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

$P_1$ または $P_2 (P_1 \vee P_2)$ が真であるのは $P_1$ と $P_2$ のどちらか少なくとも一方が真のときです. 真理表では次のようになります.

| $P_1$ | $P_2$ | $P_1 \vee P_2$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

$P_1$ の**否定** $\neg(P_1)$ が真となるのは $P_1$ が偽であるときです. 真理表では次のようになります.

| $P_1$ | $\neg(P_1)$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

となります.

$P_1$ ならば $P_2$ $(P_1 \Rightarrow P_2)$ が偽であるのは $P_1$ が真であってかつ $P_2$ が偽であるときで，その他の場合は真となります. 真理表では

| $P_1$ | $P_2$ | $P_1 \Longrightarrow P_2$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

となります．

$P_1$ と $P_2$ が**同値**であるという命題 $P_1 \Leftrightarrow P_2$ は $P_1$ と $P_2$ の真偽が一致するとき真になります．真理表では

| $P_1$ | $P_2$ | $P_1 \Longleftrightarrow P_2$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

となります．

## 1.2 論理式，同値式，トートロジー

命題 $P_1$，$P_2$，$\cdots$ を $\wedge$，$\vee$，$\neg(\cdot)$，$\Rightarrow$，$\Leftrightarrow$ を用いて組み合わせてできる命題を**論理式**と呼びます[1]．例えば

$$L_1(P_1, P_2) := (P_1 \Longrightarrow P_2)$$

$$L_2(P_1, P_2) := (\neg(P_2) \Rightarrow \neg(P_1))$$

$$L_3(P_1, P_2) := (\neg(P_1) \vee P_2)$$

と定めましょう．$L_2$ と $L_3$ の $P_1$，$P_2$ の真偽の取り方による真偽の値を計算します．まず $L_2$ について考えると

| $P_1$ | $P_2$ | $\neg(P_1)$ | $\neg(P_2)$ | $\neg(P_2) \Longrightarrow \neg(P_1)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | F | F | T |
| T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | T |
| F | F | T | T | T |

となります．次に $L_3$ の値は

[1] $\wedge$，$\vee$，$\neg(\cdot)$，を使うだけでよいことが以下で示されます．

| $P_1$ | $P_2$ | $\neg(P_1)$ | $\neg(P_1) \vee P_2$ |
|---|---|---|---|
| T | T | F | T |
| T | F | F | F |
| F | T | T | T |
| F | F | T | T |

となります．以上で $L_1(P_1, P_2)$, $L_2(P_1, P_2)$, $L_3(P_1, P_2)$ は常に同一の真偽値をとることが分かりました．これをもって

$$L_1(P_1, P_2) \equiv L_2(P_1, P_2) \equiv L_3(P_1, P_2)$$

と記します．$L_1$, $L_2$, $L_3$ は**同値式**であるといいます．また，$P_1 \Rightarrow P_2$ に対して $\neg(P_2) \Rightarrow \neg(P_1)$ をその**対偶** (contraposition) と呼びます．

**演習 1.1.** 以下の同値式を示しましょう．

$$(P_1 \Leftrightarrow P_2) \equiv ((P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)) \tag{1.1}$$

$$\text{（ド・モルガンの法則）}\quad \neg(P_1 \wedge P_2) \equiv (\neg(P_1) \vee \neg(P_2)) \tag{1.2}$$

$$\text{（ド・モルガンの法則）}\quad \neg(P_1 \vee P_2) \equiv (\neg(P_1) \wedge \neg(P_2)) \tag{1.3}$$

**注意**　以下の同値式はより基本的です．

$$\text{（交換則）}\qquad P \wedge Q \equiv Q \wedge P, \quad P \vee Q \equiv Q \vee P \tag{1.4}$$

$$\text{（結合則）}\qquad (P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R), \quad (P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R) \tag{1.5}$$

$$\text{（分配則）}\qquad (P \wedge Q) \vee R \ \equiv\ (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \tag{1.6}$$

$$\text{（分配則）}\qquad (P \vee Q) \wedge R \ \equiv\ (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \tag{1.7}$$

結合則 (1.5) があるので，(1.5) にある命題をそれぞれ

$$P \wedge Q \wedge R, \quad P \vee Q \vee R$$

と表記しても紛れることがないことに注意しましょう．

**演習 1.2.** (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) を証明しましょう．

**注意** 以下の同値式も基本的です．

$$\text{（2 重否定の法則）}\quad \neg(\neg(P)) \equiv P \tag{1.8}$$

**演習 1.3.** (1.8) を示しましょう．

次に論理式

$$(P \wedge Q) \Rightarrow P \tag{1.9}$$

を考えます．真理表

| P | Q | $P \wedge Q$ | $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | F | T |
| F | T | F | T |
| F | F | F | T |

から分かるように $P, Q$ の真偽値によらず真となります．このような論理式を**トートロジー** (tautology) あるいは**恒真式**と呼びます．このトートロジー $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ ですが，同値式として

$$\begin{aligned}(P \wedge Q) \Rightarrow P &\equiv \neg\,(P \wedge Q) \vee P \\ &\equiv (\neg(P) \vee \neg(Q)) \vee P \\ &\equiv (P \vee \neg(P)) \vee \neg(Q)\end{aligned}$$

と変形できます．より一般に

$$(P \vee \neg(P)) \vee Q \tag{1.10}$$

はトートロジーになりますから

$$(P \vee \neg(P)) \vee \neg(Q) \quad \text{従って} \quad (P \wedge Q) \Rightarrow P$$

がトートロジーであることが示されます．(1.10) がトートロジーであるのは真理表

| $P$ | $Q$ | $\neg(P)$ | $P \vee \neg(P)$ | $(P \vee \neg(P)) \vee Q$ |
|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ |

から分かります．この真理表から

$$(\text{排中律}) \quad P \vee \neg(P) \tag{1.11}$$

がトートロジーであることが分かります．

**演習 1.4.** 論理式

$$P \Rightarrow (P \vee Q) \tag{1.12}$$

がトートロジーであることを示しましょう．

上で掲げた排中律 (1.11) を含めて，基本的なトートロジーを列挙しておきましょう．

$$\text{（同一律）}\quad P \Rightarrow P \tag{1.13}$$

$$\text{（排中律）}\quad P \vee \neg(P) \tag{1.14}$$

$$\text{（矛盾律）}\quad \neg\,(P \wedge \neg(P)) \tag{1.15}$$

**演習 1.5.** (1.13),(1.15) がトートロジーであることを示しましょう．

最後に論理式

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P \tag{1.16}$$

がトートロジーであることを示しましょう（このことを**パースの法則**と呼びます）．

$$\begin{aligned}((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P &\equiv \neg\,((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \vee P \\ &\equiv \neg\,(\neg\,(\neg(P) \vee Q) \vee P) \vee (P) \\ &\equiv ((\neg(P) \vee Q) \wedge \neg(P)) \vee P \\ &\equiv (\neg(P) \vee Q \vee P) \wedge (\neg(P) \vee P) \\ &\equiv ((\neg(P) \vee P) \vee Q) \wedge (\neg(P) \vee P)\end{aligned}$$

において $(\neg(P) \vee P) \vee Q$ と $(\neg(P) \vee P)$ がトートロジーなので，最右辺がトートロジーであることが分かります．よって (1.16) がトートロジーであることが従います．

**演習 1.6.**

$$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \tag{1.17}$$

がトートロジーであることを示しましょう．

## 1.3　命題関数

$X$ を集合とします．$x \in X$ に依存する命題を**命題関数**と呼びます．例えば $X = \mathbb{R}$ のとき

$$P(x) := (x > 1)$$

$$Q(x) := (x \leq 1)$$

は $\mathbb{R}$ 上で定義される命題関数です．一般に $P(x)$ を $X$ 上の命題関数とするとき，すべての $x \in X$ に対して $P(x)$ が真であるという命題を

$$\forall x \in X \quad [P(x)]$$

と記します．他方，ある $x \in X$ に対して $P(x)$ が成立するという命題を

$$\exists x \in X \quad [P(x)]$$

と記します[2].

以下の公式

$$\neg\,(\forall x \in X \quad [P(x)]) \equiv (\exists x \in X \quad \neg\,(P(x))) \tag{1.18}$$

$$\neg\,(\exists x \in X \quad [P(x)]) \equiv (\forall x \in X \quad \neg\,(P(x))) \tag{1.19}$$

は重要です.

## 1.4　集合

### 1.4.1　包含関係

以下では集合 $X$ の部分集合 $A, B, C \subset X$ を考えます.

**1.**

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \quad \wedge \quad B \subset A$$

**2.**

$$\neg\,(A \subset B) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in A\,(x \notin B)$$

**注意**

$$A \subset B \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \forall x \in A\,(x \in B)$$

さらにこの条件は

$$\forall x \in X\,(x \in A \ \Rightarrow x \in B)$$

と同値であることにも注意しましょう.

**3.**

$$(A \subset B \quad \wedge \quad B \subset C) \quad \Rightarrow \quad A \subset C \tag{1.20}$$

(1.20) は命題 $P$, $Q$, $R$ に対して，論理式

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \tag{1.21}$$

がトートロジーであることから導かれます．実際，$x \in X$ に対して

$$((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)) \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in C)$$

が常に成立することから (1.20) が成立することが分かります.

[2] $\forall$ は all, any の A, $\exists$ は exist の E が由来である.

**演習 1.7.** (1.21) を真理表を用いて証明しましょう．

**4.**

$$(A \subset B \quad \wedge \quad A \subset C) \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \cap C \tag{1.22}$$

(1.22) を証明する前に

$$B \cap C \subset B, \quad B \cap C \subset C$$

が常に成立することに注意しましょう．例えば $B \cap C \subset B$ ですが，$x \in X$ に対して

$$(x \in B \wedge x \in C) \Rightarrow x \in B$$

がトートロジーであることから従います（(1.9) 参照）．

　以上の注意をもとに (1.22) を証明しましょう．

($\Leftarrow$) $A \subset B \cap C$, $B \cap C \subset B$ から $A \subset B$ が従います．同様に $A \subset B \cap C$, $B \cap C \subset C$ から $A \subset C$ が従います.

($\Rightarrow$) $\forall x \in A$ をとると，$x \in B$ かつ $x \in C$ が成立しているが，このとき $x \in B \cap C$ が従う．以上で $A \subset B \cap C$ が導かれました.

　実は (1.22) は，命題 $P$, $Q$, $R$ に対して同値式

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) \equiv P \Rightarrow (Q \wedge R) \tag{1.23}$$

が成立することから直接導くことができます．実際 $x \in X$ に対して

$$((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in A \Rightarrow x \in C)) \equiv (x \in A \Rightarrow (x \in B \wedge x \in C))$$

が (1.22) に他なりません．また (1.23) は

$$\begin{aligned}(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) &\equiv (\neg(P) \vee Q) \wedge (\neg(P) \vee R)\\ &\equiv \neg(P) \vee (Q \wedge R)\\ &\equiv P \Rightarrow (Q \wedge R)\end{aligned}$$

と証明できます.

**5.**

$$(A \subset C \quad \wedge \quad B \subset C) \quad \Leftrightarrow \quad A \cup B \subset C \tag{1.24}$$

　(1.24) を証明する前に

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B$$

が常に成立することに注意しましょう．例えば $A \subset A \cup B$ ですが，$x \in X$ に対して

$$x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

がトートロジーであることから従います（(1.12) 参照）．

　次に (1.24) を証明しましょう．

$(\Leftarrow)$ $A \subset A \cup B$, $A \cup B \subset C$ から $A \subset C$ が従います．同様に $B \subset A \cup B$, $A \cup B \subset C$ から $B \subset C$ が従います．

$(\Rightarrow)$

$$\forall x \in A \quad \text{に対して} \quad x \in C$$

$$\forall x \in B \quad \text{に対して} \quad x \in C$$

が成立するとします．このとき $x \in A \cup B$ が成立しているとします．すると

$$x \in A \quad \vee \quad x \in B$$

が従います．$x \in A$ ならば $x \in C$, $x \in B$ ならば $x \in C$ となりますから，$x \in C$ であることが分かります．これは

$$A \cup B \subset C$$

が成立することを意味します．

　実は (1.24) は，命題 $P$, $Q$, $R$ に対して同値式

$$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \equiv (P \vee Q) \Rightarrow R \tag{1.25}$$

が成立することから直接導くことができます．実際 $x \in X$ に対して

$$((x \in A \Rightarrow x \in C) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)) \equiv (x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in C$$

が (1.24) に他なりません．また (1.25) は

$$\begin{aligned}(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) &\equiv (\neg(P) \vee R) \wedge (\neg(Q) \vee R) \\ &\equiv (\neg(P) \wedge \neg(Q)) \vee R \\ &\equiv \neg(P \vee Q) \vee R \\ &\equiv (P \vee Q) \Rightarrow R\end{aligned}$$

と証明できます．

**6.** （分配法則）

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \tag{1.26}$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1.27}$$

(1.26) を示します.

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup C &\Leftrightarrow x \in A \cap B \quad \vee \quad x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \quad \wedge \quad x \in B) \quad \vee \quad x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \quad \vee \quad x \in C) \quad \wedge \quad (x \in B \quad \vee \quad x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup C \quad \wedge \quad x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

**演習 1.8.** (1.27) を証明しましょう.

**注意** 上で (1.26) を示すために (1.6) すなわち

$$(P \wedge Q) \vee R \ \equiv \ (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \tag{1.28}$$

を用いました. また (1.27) を示すには (1.7) すなわち

$$(P \vee Q) \wedge R \ \equiv \ (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \tag{1.29}$$

を用います.

**注意**　以下の基本的な等式があります.

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A \tag{1.30}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \tag{1.31}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \tag{1.32}$$

### 1.4.2　差集合・補集合

$A, B, C \subset X$ とします. このとき $X$ の部分集合

$$A \setminus B := \{x \in X;\ x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\}$$

を定義します.

**1.** （ド・モルガン則）

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \tag{1.33}$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \tag{1.34}$$

(1.33) を示します.

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad x \notin (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad \neg(x \in B \quad \vee \quad x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad (x \notin B \quad \wedge \quad x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \quad \wedge \quad x \notin B) \quad \wedge \quad (x \in A \quad \wedge \quad x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus B \quad \wedge \quad x \in A \setminus C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \end{aligned}$$

**演習 1.9.** (1.34) を示しましょう.

さらに

$$A^c := X \setminus A$$

と定義して $A$ の**補集合**と呼びます．上の (1.33), (1.34) から次の (1.35), (1.36) が従います.

**2.**（ド・モルガン則）

$$(B \cup C)^c = B^c \cap C^c \tag{1.35}$$

$$(B \cap C)^c = B^c \cup C^c \tag{1.36}$$

### 1.4.3　直積集合

$X$ と $Y$, $Z$ を集合とします．このとき

$$X \times Y := \{(x, y);\ x \in X,\ y \in Y\}$$

$$X \times Y \times Z := \{(x, y, z);\ x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z\}$$

を**直積集合**と呼びます．例えば 2 次元列ベクトル全体の集合

$$\mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\ x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

に対して

$$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 := \{(\vec{x}, \vec{y});\ \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2\}$$

と 2 本の 2 次元列ベクトルの順列全体の集合が定まります．このとき

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

に注意しましょう.

3 次元列ベクトル全体の集合

$$\mathbf{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}$$

に対して

$$\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3 := \{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z});\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^3\}$$

と 3 本の 3 次元列ベクトルの順列全体の集合が定まります.

## 1.5　写像

$X, Y$ 集合として写像

$$f:\ X \to Y$$

が与えられているとします．このとき $X$ を**定義域**, $Y$ を値域と呼びます.

**注意** $f:\ X \to X$ を $X$ 上の**変換**と呼びます.

**1.** （像，グラフ）$A \subset X$ に対して $Y$ の部分集合

$$f(A) := \{f(a) \in Y;\ a \in A\}$$

を $A$ の $f$ による**像**と呼びます.

$$G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y;\ x \in X\}$$

を $f$ の**グラフ**と呼びます.

**2.** （合成）$Z$ を集合として写像

$$g:\ Y \to Z$$

を考えます．このとき

$$g \circ f:\ X \to Z \quad x \mapsto g(f(x))$$

を $f$ と $g$ の合成と呼びます.

**3.** （写像の合成に関する結合則）

さらに集合 $W$ と写像

$$h\colon\ Z \to W$$

があるとき

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \tag{1.37}$$

が成立します.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] \arrow[rrr, bend left=60, "h \circ (g \circ f)"] \arrow[rrr, bend right=60, "(h \circ g) \circ f"'] & Y \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend right, "h \circ g"'] & Z \arrow[r, "h"'] & W \end{tikzcd}$$

**演習 1.10.** (1.37) を示しましょう.

**4.** （逆写像）写像 $f\colon\ X \to Y$ に対して

$$g \circ f = id_X, \quad f \circ g = id_Y \tag{1.38}$$

を満たす $g$ を $f$ の**逆写像**と呼びます.

逆写像は存在すれば一意的に定まります．すなわち 2 つの写像

$$g_1\colon\ Y \to X, \quad g_2\colon\ Y \to X$$

が

$$g_1 \circ f = id_X,\ f \circ g_1 = id_Y,\ g_2 \circ f = id_X,\ f \circ g_2 = id_Y$$

を満たすならば $g_1 = g_2$ が成立します．実際

$$g_2 = id_X \circ g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ id_Y = g_1$$

からこのことは証明できます．この一意性から $f$ の逆写像を

$$f^{-1}\colon\ Y \to X$$

と記します.

**5.** （全射）写像 $f\colon\ X \to Y$ に対して

$$f(X) = Y$$

が成立するとき，すなわち

$$\forall y \in Y \text{ に対して} \exists x \in X \text{が存在して} f(x) = y$$

が成立するとき，$f$ は**全射**であるといいます.

**定理 1.1.** ある写像 $g\colon\ Y \to X$ が

$$f \circ g = id_Y$$

を満たせば，$f$ は全射となります.

**証明** 任意の $y \in Y$ に対して

$$y = f(g(y))$$

が成立しますから，$f$ が全射であることが分かります.

**6.** （単射）写像 $f\colon\ X \to Y$ に対して

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

が成立するとき，$f$ は**単射**であるといいます.

**定理 1.2.** ある写像 $g\colon\ Y \to X$ が

$$g \circ f = id_X$$

を満たせば，$f$ は単射となります.

**証明** $f(x) = f(x')$ とすると

$$g \circ f(x) = g \circ f(x')$$

から

$$x = x'$$

が従います.

**7.** （全単射） 写像 $f\colon\ X \to Y$ が全射でかつ単射であるとき $f$ を**全単射**と呼びます.

定理 1.1 と定理 1.2 から次の定理 1.3 が従います.

**定理 1.3.** $f : X \to Y$ に逆写像 $g\colon\ Y \to X$ が存在すれば $f$ は全単射であることが従います.

定理 1.3 の逆が成立します.

**定理 1.4.** 写像 $f\colon\ X \to Y$ が全単射ならば，$f$ には逆写像が存在します.

**証明** 逆写像 $g\colon\ Y \to X$ を構成します．$f$ は全射ですから任意の $y \in Y$ に対して

$$y = f(x)$$

を満たす $x \in X$ が存在します．しかもこの条件を満たす $x \in X$ はただ一つ存在します．実際 $f$ は単射ですから

$$f(x) = f(x') \quad \text{から} \quad x = x'$$

が従うからです．この状況で

$$g(y) := x$$

と定義します．この式を $y = f(x)$ の $x$ に代入すると

$$y = f(g(y))$$

が成立することが分かります．さらに任意の $x \in X$ に対して $y = f(x)$ と定めると $g$ の定義から $g(y) = x$ となりますが

$$g(f(x)) = x$$

が従います.

## 1.6　補足–論理式，同値式，トートロジー

### 1.6.1　補足–命題関数（1 変数）

集合 $X$ 上定義された命題関数 $P(x)$,$Q(x)$ を考えます．このとき同値式

$$\forall x \in X\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x \in X\,(P(x))) \wedge (\forall x \in X\,(Q(x))) \tag{1.39}$$

が成立します．実際，任意の $x \in X$ に対して

$$P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow P(x), \quad P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow Q(x)$$

はそれぞれトートロジーですから

$$\forall x \in X\,(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X\,(P(x))\,, \quad \forall x \in X\,(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X\,(Q(x))\,,$$

が成立します．よって

$$\forall x \in X\,(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in X\,(P(x))) \wedge (\forall x \in X\,(Q(x)))$$

が成立します．逆に

$$\forall x \in X\,(P(x)) \quad \text{と} \quad \forall x \in X\,(Q(x))$$

が成立しているとします．このとき任意の $x \in X$ に対して $P(x)$ と $Q(x)$ が成立しますから，$P(x) \wedge Q(x)$ が成立します．よって

$$\forall x \in X\,(P(x) \wedge Q(x))$$

が成立することが分かりました．

次に

$$(\forall x \in X\,(P(x))) \vee (\forall x \in X\,(Q(x))) \Rightarrow \forall x \in X\,(P(x) \vee Q(x)) \tag{1.40}$$

が成立することを示しましょう．実際，任意の $x \in X$ に対して

$$P(x) \Rightarrow (P(x) \vee Q(x))\,, \quad \text{および} \quad Q(x) \Rightarrow (P(x) \vee Q(x))$$

がトートロジーです．従って

$$\forall x \in X\,(P(x)) \Rightarrow \forall x \in X\,(P(x) \vee Q(x))$$

$$\forall x \in X\,(Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X\,(P(x) \vee Q(x))$$

が成立します．一般にトートロジー

$$(P_1 \Rightarrow P_3) \vee (P_2 \Rightarrow P_3) \Rightarrow ((P_1 \vee P_2) \Rightarrow P_3)$$

が成立することを用いると (1.40) が従います．

**演習 1.11.** (1.40) の逆，すなわち

$$\forall x \in X\,(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in X\,(P(x))) \vee (\forall x \in X\,(Q(x)))$$

が成立しないことを示しましょう．

さらに (1.39), (1.40) と関係する同値式，トートロジーを紹介します．

$$\exists x \in X\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x \in (P(x))) \vee (\exists x \in (Q(x))) \tag{1.41}$$

(⇒) (1.41) の左辺が成立するとします．すなわち，ある $a \in X$ に対して $P(a) \vee Q(a)$ が成立するとします．このとき $P(a)$ が真であるか，または $Q(a)$ が真となります．$P(a)$ が真ならば，$\exists x \in X\,(P(x))$ が真となります．他方 $Q(a)$ が真ならば，$\exists x \in X\,(Q(x))$ が真となります．従っていずれの場合も

$$\exists x \in X\,(P(x)) \vee \exists x \in X\,(Q(x))$$

が真となります．
(⇐) (1.41) の右辺が成立するとします．$\exists x \in (P(x))$ が真ならばある $a \in X$ に対して $P(a)$ が真となります．このとき $P(a) \vee Q(a)$ が真となりますから，$\exists x \in X\,(P(x) \vee Q(x))$ が真となります．他方，$\exists x \in (Q(x))$ が真ならばある $a \in X$ に対して $Q(a)$ が真となります．このとき $P(a) \vee Q(a)$ が真となりますから，$\exists x \in X\,(P(x) \vee Q(x))$ が真となります．

以上で証明が済みましたが，(1.41) の両辺の否定が同値であることを示すという方法もあります．すなわち

$$\begin{aligned}
\neg\,(\exists x \in X\,(P(x) \vee Q(x))) &\equiv \forall x \in X\,(\neg\,(P(x)) \wedge \neg\,(Q(x))) \\
&\overset{(*)}{\equiv} (\forall x \in X\,(\neg\,(P(x)))) \wedge (\forall x \in X\,(\neg\,(Q(x)))) \\
&\equiv \neg\,(\neg\,(\forall x \in X\,(\neg\,(P(x)))) \wedge (\forall x \in X\,(\neg\,(Q(x))))) \\
&\equiv \neg\,(\exists x \in X\,(P(x)) \vee \exists x \in X\,(Q(x)))
\end{aligned}$$

から (1.41) が従います．ここで (*) において (1.39) を用いました．

**演習 1.12.** 同値式

$$\exists x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \equiv (\forall x \in X\,(P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X\,(Q(x)))$$

が成立することを示しましょう．

次に (1.40) と関係するトートロジー

$$\exists x \in X\,(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in X\,(P(x))) \wedge (\exists x \in X\,(Q(x))) \tag{1.42}$$

を紹介します．左辺が真ならば，ある $a \in X$ に対して $P(a) \wedge Q(a)$ が成立します．従って $P(a)$ と $Q(a)$ が真です．従って $\exists x \in X(P(x))$ と $\exists x \in X(Q(x))$ が真ですから

$$(\exists x \in X(P(x))) \wedge (\exists x \in X(Q(x)))$$

が真であることが分かります.

**演習 1.13.** (1.42) の対偶が真であることを (1.40) を用いて示しましょう.

**演習 1.14.**

$$\forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x \in X\,(P(x))) \Rightarrow (\forall x \in X\,(Q(x))))$$

がトートロジーであることを示しましょう.

**演習 1.15.**

$$\forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\exists x \in X\,(P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X\,(Q(x))))$$

がトートロジーであることを示しましょう.

### 1.6.2 補足–命題関数（多変数）

集合 $X, Y$ があるとします．その直積集合 $X \times Y$ 上の命題関数 $P(x, y)$ を考えます．このとき

$$\forall y \in Y\,(P(x,y)), \quad \exists y \in Y\,(P(x,y))$$

は $X$ 上の命題関数となります．他方

$$\forall x \in X\,(P(x,y)), \quad \exists x \in X\,(P(x,y))$$

は $Y$ 上の命題関数となります.

実例を考えます． $X = Y = \{1,2,3,4,5\}$ として、$X \times Y$ 上の命題関数

$$P(x,y) := (2x + y < 8) \tag{1.43}$$

を考えます．このとき $2x + y$ の値に関する右の表から

| $y\backslash x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **3** | **5** | **7** | 9 | 11 |
| 2 | **4** | **6** | 8 | 10 | 12 |
| 3 | **5** | **7** | 9 | 11 | 13 |
| 4 | **6** | 8 | 10 | 12 | 14 |
| 5 | **7** | 9 | 11 | 13 | 15 |

$$\forall y \in Y\,(P(x,y)) \equiv (x = 1)$$

$$\exists y \in Y\,(P(x,y)) \equiv (x = 1, 2, 3)$$

であることが分かります.

別の実例を考えます.

$$X = Y = \mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R};\ x > 0\}$$

として，$X \times Y$ 上の命題関数

$$P(x,y) := \left(y > x^2\right)$$

を考えます．すると

$$\forall y \in Y\,(P(x,y)) \equiv F, \quad \exists y \in Y\,(P(x,y)) \equiv T$$

となります．さらに残っている変数 $x \in X$ について考えると

$$\forall x \in X\,(\forall y \in Y\,(P(x,y))) \equiv F, \qquad \exists x \in X\,(\forall y \in Y\,(P(x,y))) \equiv F$$
$$\forall x \in X\,(\exists y \in Y\,(P(x,y))) \equiv T, \qquad \exists x \in X\,(\exists y \in Y\,(P(x,y))) \equiv T$$

となります．他方，$x \in X$ から考えると

$$\forall x \in X\,(P(x,y)) \equiv F, \quad \exists x \in X\,(P(x,y)) \equiv T$$

となります．さらに残っている変数 $y \in Y$ について考えると

$$\forall y \in Y\,(\forall x \in X\,(P(x,y))) \equiv F, \qquad \exists y \in Y\,(\forall x \in X\,(P(x,y))) \equiv F$$
$$\forall y \in Y\,(\exists x \in X\,(P(x,y))) \equiv T, \qquad \exists y \in Y\,(\exists x \in X\,(P(x,y))) \equiv T$$

となります．

このように 2 変数の命題関数に限定作用素を施して 8 種類の命題を構成できますが，紛れない限り括弧を二重にするのはやめて，例えば

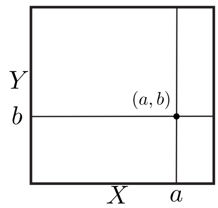
$$\exists x \in X\,(\forall y \in Y\,(P(x,y))) \quad \text{は} \quad \exists x \in X \forall y \in Y\,(P(x,y))$$

と略記することにします．これらの 8 種類の命題の間で成立することを説明します．

$$\forall (x,y) \in X \times Y\,(P(x,y)) \equiv \forall x \in X \forall y \in Y\,(P(x,y)) \equiv \forall y \in Y \forall x \in X\,(P(x,y)) \tag{1.44}$$

$$\exists (x,y) \in X \times Y\,(P(x,y)) \equiv \exists x \in X \exists y \in Y\,(P(x,y)) \equiv \exists y \in Y \exists x \in X\,(P(x,y)) \tag{1.45}$$

ですが，(1.44), (1.45) ともに図式的に $X \times Y$ を用いて示すことができます．




一般に 1 変数の命題関数 $R(y)$ に対して

$$\forall y \in Y\,(R(y)) \Rightarrow \exists y \in Y\,(R(y))$$

はトートロジーです．従って，任意の $x \in X$ に対して

$$\forall y \in Y\,(P(x,y)) \Rightarrow \exists y \in Y\,(P(x,y))$$

が成立します．よって

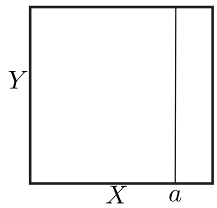
$$\forall x \in X \forall y \in Y\,(P(x,y)) \Rightarrow \forall x \in X \exists y \in Y\,(P(x,y)) \tag{1.46}$$

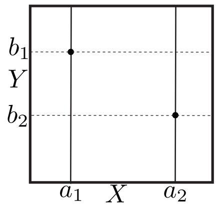
$$\exists x \in X \forall y \in Y\,(P(x,y)) \Rightarrow \exists x \in X \exists y \in Y\,(P(x,y)) \tag{1.47}$$

がトートロジーであることが分かります．次に

$$\exists x \in X \forall y \in Y\,(P(x,y)) \Rightarrow \forall y \in Y \exists x \in X\,(P(x,y)) \tag{1.48}$$

がトートロジーであることを説明します．左辺が成立するならば，ある $a \in X$ に対して




$$\forall y \in Y\,(P(a,y))$$

が成立します．従って任意の $b \in Y$ に対して

$$P(a,b) \quad \text{従って} \quad \exists x \in X\,(P(x,b))$$

が成立します．さらにこれは

$$\forall y \in Y \exists x \in X\,(P(x,y))$$

が成立することを意味します．右上図が左辺，右下図が右辺が成立することを表しています．すなわち右上図の場合は

$$\{(x,y) \in X \times Y;\ x = a\}$$

が $P(x,y)$ の真理集合に含まれているという意味です．また右辺が成立する場合は任意の $b \in Y$ に対して

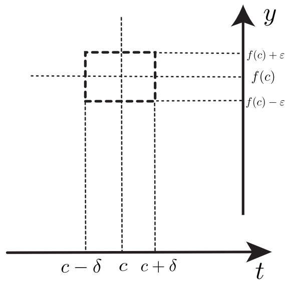
$$\{(x,y) \in X \times Y;\ y = b\}$$

に真理集合の点が少なくとも 1 点含まれていることを意味します．

最後に 2 変数の命題関数 $P(x,y)$ に $x \in X$, $Y \in Y$ に関する限定作用素を施して得られる命題，例えば $\forall x \in X \exists y \in Y\,(P(x,y))$ の否定について考えます．

$$\begin{aligned}\neg\,(\forall x \in X \exists y \in Y\,(P(x,y))) &\equiv \exists x \in X \neg\,(\exists y \in Y\,(P(x,y))) \\ &\equiv \exists x \in X \forall y \in Y \neg P(x,y)\end{aligned}$$

であることが分かります．




具体的な例を考えます．開区間 $(a, b)$ 上の関数

$$f:\ (a, b) \to \mathbf{R}$$

が与えられているとします．このとき $c \in (a, b)$ で $f$ が連続である必要十分条件は

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in (a, b)\, (t \in (c - \delta, c + \delta) \Rightarrow f(c) - \varepsilon < f(t) < f(c) + \varepsilon)$$

と定義されます．これを否定すると

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists t \in (a, b)\ \ (c - \delta < t < c + \delta\ \wedge\ (f(t) \leq f(c) - \varepsilon\ \vee\ f(t) \geq f(c) + \varepsilon))$$

となります．

**演習 1.16.** $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とします．以下の命題の真偽値を求めましょう．
***(1)*** $\forall x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20)$　***(2)*** $\forall x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20)$
***(3)*** $\exists x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20)$　***(4)*** $\exists x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20)$

**演習 1.17.** 演習 *1.16* の各命題の否定を求めましょう．

## 章末問題と解答

**I** 集合 $X$ の部分集合 $A, B \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$\text{(i) } A \subset B \Leftrightarrow \text{(ii) } A = A \cap B \Leftrightarrow \text{(iii) } B = A \cup B \tag{1.49}$$

**II** 集合 $X$ の部分集合 $A, B, C \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1.50}$$

**III** 命題 $P, Q, R$ に対して以下の同値式を示しましょう．

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \tag{1.51}$$

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \tag{1.52}$$

**IV** 集合 $X$ の部分集合 $A, B, C \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \tag{1.53}$$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \tag{1.54}$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \tag{1.55}$$

**V** 写像 $f\colon X \to Y$ が与えられているとき，$X$ の部分集合 $A, B \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \tag{1.56}$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \tag{1.57}$$

**VI** 写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ が与えられているとき，以下を示しましょう．
**(1)** $f$, $g$ が全射ならば $g \circ f$ も全射となる．
**(2)** $f$, $g$ が単射ならば $g \circ f$ も単射となる．
**(3)** $g \circ f$ が全射ならば $g$ も全射となる．
**(4)** $g \circ f$ が単射ならば $f$ も単射となる．

**VII** 写像 $f\colon X \to Y$ が与えらているとします．$Y$ の部分集合 $B$ に対して $X$ の部分集合

$$f^{-1}(B) := \{x \in X;\ f(x) \in B\}$$

を定義します（$B$ の $f$ による**逆像**と呼びます）．このとき $Y$ の部分集合 $B_1$, $B_2$ に対して以下を示しましょう．

**(1)**

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

**(2)**

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

**I** 集合 $X$ の部分集合 $A, B \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$\text{(i) } A \subset B \Leftrightarrow \text{(ii) } A = A \cap B \Leftrightarrow \text{(iii) } B = A \cup B \tag{1.58}$$

**解答**

**(i)⇒(ii)**

$$A \supset A \cap B$$

が常に成立しますから，$A \subset A \cap B$ を示せば $A = A \cap B$ を示すことができます．さらに $A \subset A$ かつ $A \subset B$ から

$$A \subset A \cap B$$

が従いますから[3]，(ii) が示せました．

**(ii)⇒(i)**

$$B \cap A \subset B$$

が常に成立しますから，$A = A \cap B \subset B$ から $A \subset B$ が従います．

**(i)⇒(iii)**

$$B \subset A \cup B$$

が常に成立しますから，$B \supset A \cup B$ を示せば $B = A \cup B$ が示せます．さらに $B \subset B$ かつ $A \subset B$ から $A \cup B \subset B$ が従いますから[4]，(iii) が示せました．

**(iii)⇒(i)**

$$A \subset A \cup B$$

が常に成立しますから

$$A \subset A \cup B = B$$

となりますから，$A \subset B$ が示せます．

**II** 集合 $X$ の部分集合 $A, B, C \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1.59}$$

[3] $A, B, C \subset X$ のとき

$$(A \subset B \quad \text{かつ} \quad A \subset C) \quad \Rightarrow A \subset B \cap C$$

が成立することを用いています．

[4] $A, B, C \subset X$ のとき

$$(A \subset C \quad \text{かつ} \quad B \subset C) \quad \Rightarrow A \cup B \subset C$$

が成立することを用いています．

**解答**

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cap C) \vee (x \in B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

**III** 命題 $P, Q, R$ に対して以下の同値式を示しましょう．

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \tag{1.60}$$

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \tag{1.61}$$

**解答**

| P | Q | R | P∧Q | (P∧ Q)∨ R | P∨ R | Q∨ R | (P∨ R)∧(Q∨R) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | T | T | T | T |
| T | F | T | F | T | T | T | T |
| T | F | F | F | F | T | F | F |
| F | T | T | F | T | T | T | T |
| F | T | F | F | F | F | T | F |
| F | F | T | F | T | T | T | T |
| F | F | F | F | F | F | F | F |

この真理表から $(P, Q, R)$ の 8 通りの真偽の組み合わせにおいて $(P \wedge Q) \vee R$ と $(P \vee R) \wedge (Q \vee R)$ の真偽がすべて一致しているので，

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \tag{1.62}$$

であることが分かります．

| P | Q | R | P∨Q | (P∨ Q)∧ R | P∧ R | Q∧ R | (P∧ R)∨(Q∧R) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | F | F | F | F |
| T | F | T | T | T | T | F | T |
| T | F | F | T | F | F | F | F |
| F | T | T | T | T | F | T | T |
| F | T | F | T | F | F | F | F |
| F | F | T | F | F | F | F | F |
| F | F | F | F | F | F | F | F |

この真理表から $(P, Q, R)$ の8通りの真偽の組み合わせにおいて $(P \vee Q) \wedge R$ と $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$ の真偽がすべて一致しているので，

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \tag{1.63}$$

であることが分かります．

**IV** 集合 $X$ の部分集合 $A, B, C \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \tag{1.64}$$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \tag{1.65}$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \tag{1.66}$$

**解答**

(1.64) について

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \setminus C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

(1.65) について

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \setminus C &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C) \end{aligned}$$

ここで命題 $P, Q, R$ に対して

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

が成立することを用いています[5]．

(1.66) について

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \setminus C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \end{aligned}$$

[5] この結果があるのでこの両辺にある命題を $P \wedge Q \wedge R$ と記していいことが分かる．

**V** 写像 $f\colon\ X \to Y$ が与えられているとき，$X$ の部分集合 $A, B \subset X$ に対して以下を示しましょう．

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \tag{1.67}$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \tag{1.68}$$

**解答**

(1.67) について

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B\ y = f(x) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in A\ y = f(x)) \vee (\exists x \in B\ y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

上で以下を用いていることに注意しましょう．

集合 $X$ 上の命題関数 $P(x)$ と $X$ の部分集合 $A, B \subset X$ に対して

$$\exists x \in A \cup B\ \ (P(x)) \equiv (\exists x \in A(P(x))) \vee (\exists x \in B(P(x)))$$

が成立します．

これがすぐ見えたら以下の説明は不要ですが，少し解説しましょう．

まず集合 $X$ 上の命題関数 $P(x)$ と $Q(x)$ に対して

$$\exists x \in X\ \ (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x \in X\ \ (P(x))) \vee (\exists x \in X\ \ (Q(x)))$$

が成立することに注意しましょう．また $X$ の部分集合 $A$ に対して

$$\exists x \in A\ (P(x)) \equiv \exists x \in X\ \ (x \in A \wedge P(x))$$

も成立します．これを用いると

$$\begin{aligned} \exists x \in A \cup B\ (P(x)) &\equiv \exists x \in X\ \ (x \in A \cup B \wedge P(x)) \\ &\equiv \exists x \in X\ \ ((x \in A \vee x \in B) \wedge P(x)) \\ &\equiv \exists x \in X\ \ ((x \in A \wedge P(x)) \vee (x \in B \wedge P(x))) \\ &\equiv \exists x \in X\ \ (x \in A \wedge P(x)) \vee \exists x \in X\ \ (x \in B \wedge P(x)) \\ &\equiv (\exists x \in A\ (P(x))) \vee (\exists x \in B\ (P(x))) \end{aligned}$$

が導けます．

(1.68) について

まず以下の (1.69) を示します．

$X$ の部分集合 $A_1, A_2 \subset X$ に対して

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2) \tag{1.69}$$

が成立します.

実際

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in A_1 \ y = f(x) \\ &\underset{(*)}{\Rightarrow} \quad \exists x \in A_2 \ y = f(x) \Leftrightarrow y \in f(A_2) \end{aligned}$$

と示せます．ここで (*) において以下を用いています.

集合 $X$ 上の命題関数 $P(x)$ が与えられているときに $X$ の部分集合 $A, B$ が $A \subset B$ を満たすならば

$$(\exists x \in A \ \ (P(x))) \Rightarrow (\exists x \in B \ \ (P(x)))$$

が常に成立します.

最後に (1.68) を示します.

$$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B$$

が常に成立しますから

$$f(A \cap B) \subset f(A), \quad f(A \cap B) \subset f(B)$$

が (1.69) を用いると導けます．これから

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

であることが従います.

**VI** 写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to Z$ が与えられているとき，以下を示しましょう.
**(1)** $f$, $g$ が全射ならば $g \circ f$ も全射となる.
**(2)** $f$, $g$ が単射ならば $g \circ f$ も単射となる.
**(3)** $g \circ f$ が全射ならば $g$ も全射となる.
**(4)** $g \circ f$ が単射ならば $f$ も単射となる.

**解答**

**(1)** 任意の $z \in Z$ をとります．$g$ が全射なので $\exists y \in Y$ が存在して

$$z = g(y)$$

が成立します．$f$ が全射なので，この $y \in Y$ に対して $\exists x \in X$ が存在して

$$y = f(x)$$

が成立します．このとき

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

が成立します．よって $g \circ f$ は全射であることが分かります.
**(2)** $x, x' \in X$ に対して

$$g \circ f(x) = g \circ f(x') \quad \text{すなわち} \quad g(f(x)) = g(f(x'))$$

が成立するとします．$g$ が単射なので

$$f(x) = f(x')$$

が成立します．さらに $f$ が単射なので

$$x = x'$$

が従います．よって $g \circ f$ は単射であることが分かります.
**(3)** $g \circ f$ が全射なので $\forall z \in Z$ に対して $\exists x \in X$ が存在して

$$z = g \circ f(x) = g(f(x))$$

が成立します．ここで $f(x) \in Y$ なので $g$ が全射であることが分かります.
**(4)** $x, x' \in X$ に対して $f(x) = f(x')$ が成立すると仮定します．このとき

$$g(f(x)) = g(f(x')) \quad \text{すなわち} \quad g \circ f(x) = g \circ f(x')$$

が従います．ここで $g \circ f$ が単射であることを用いると

$$x = x'$$

となります．よって $f$ は単射であることが示されました.

**VII** 写像 $f\colon\ X \to Y$ が与えらているとします．$Y$ の部分集合 $B$ に対して $X$ の部分集合

$$f^{-1}(B) := \{x \in X;\ f(x) \in B\}$$

を定義します（$B$ の $f$ による逆像と呼びます）．このとき $Y$ の部分集合 $B_1, B_2$ に対して以下を示しましょう.
**(1)**

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

**(2)**

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

**解答 (1)**

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\Leftrightarrow\ f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ &\Leftrightarrow\ f(x) \in B_1\ \vee\ f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(B_1)\ \vee\ x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

**(2)**

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow\ f(x) \in B_1 \cap B_2 \\ &\Leftrightarrow\ f(x) \in B_1\ \wedge\ f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(B_1)\ \wedge\ x \in f^{-1}(B_2) \\ &\Leftrightarrow\ x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \end{aligned}$$

**演習 1.1**

| $P_1$ | $P_2$ | $P_1 \iff P_2$ | $P_1 \Rightarrow P_2$ | $P_2 \Rightarrow P_1$ | $(P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | F |
| F | T | F | T | F | F |
| F | F | T | T | T | T |

から

$$P_1 \Leftrightarrow P_2 \equiv (P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)$$

が示されました.

| $P_1$ | $P_2$ | $P_1 \wedge P_2$ | $\neg(P_1 \wedge P_2)$ | $\neg(P_1)$ | $\neg(P_2)$ | $\neg(P_1) \vee \neg(P_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F | F | F |
| T | F | F | T | F | T | T |
| F | T | F | T | T | F | T |
| F | F | F | T | T | T | T |

から

$$\neg(P_1 \wedge P_2) \equiv \neg(P_1) \vee \neg(P_2)$$

が分かります.

| $P_1$ | $P_2$ | $P_1 \vee P_2$ | $\neg(P_1 \vee P_2)$ | $\neg(P_1)$ | $\neg(P_2)$ | $\neg(P_1) \wedge \neg(P_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F | F | F |
| T | F | T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | T | F | F |
| F | F | F | T | T | T | T |

から

$$\neg(P_1 \vee P_2) \equiv \neg(P_1) \wedge \neg(P_2)$$

が分かります.

**演習 1.2**

(1.4)

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $Q \wedge P$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | F | F |
| F | T | F | F |
| F | F | F | F |

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ | $Q \vee P$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | T | T |
| F | T | T | T |
| F | F | F | F |

から

$$（交換則）\qquad P \wedge Q \equiv Q \wedge P, \quad P \vee Q \equiv Q \vee P$$

が分かります．

<u>(1.5)</u>

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \wedge Q$ | $(P \wedge Q) \wedge R$ | $Q \wedge R$ | $P \wedge (Q \wedge R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | F | F | F |
| T | F | T | F | F | F | F |
| T | F | F | F | F | F | F |
| F | T | T | F | F | T | F |
| F | T | F | F | F | F | F |
| F | F | T | F | F | F | F |
| F | F | F | F | F | F | F |

から

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

であることが分かります．他方

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \vee Q$ | $(P \vee Q) \vee R$ | $Q \vee R$ | $P \vee (Q \vee R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | T | T | T |
| T | F | T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | T | F | T |
| F | T | T | T | T | T | T |
| F | T | F | T | T | T | T |
| F | F | T | F | T | T | T |
| F | F | F | F | F | F | F |

から

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

であることが分かります．

(1.6), (1.7) は章末問題 III です．

**演習 1.3**

| $P$ | $\neg(P)$ | $\neg(\not(P))$ |
|---|---|---|
| $T$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $F$ |

から 2 重否定の法則

$$\neg(\neg(P)) \equiv P$$

が成立することが分かります.

**演習 1.4**

| P | Q | $P \vee Q$ | $P \Rightarrow (P \vee Q)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | T | T |
| F | T | T | T |
| F | F | F | T |

から

$$P \Rightarrow (P \vee Q)$$

がトートロジーであることが分かります.

**演習 1.5** (1.13)

| $P$ | $P \Rightarrow P$ |
|---|---|
| $T$ | $T$ |
| $F$ | $T$ |

から

$$P \Rightarrow P$$

がトートロジーであることが分かります（同一律）.
(1.15)

| $P$ | $\neg(P)$ | $P \wedge \neg(P)$ | $\neg(P \wedge \neg(P))$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $F$ | $T$ |

から

$$\neg\,(P \wedge \neg(P))$$

がトートロジーであることが分かります（矛盾律）.

**演習 1.6**

$$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \tag{1.70}$$

の真偽について真理表を作ります.

| $P$ | $Q$ | $R$ | $*_1 := (Q \Rightarrow R)$ | $*_2 := (P \Rightarrow *_1)$ | $*_3 := P \Rightarrow Q$ | $*_2 \wedge *_3$ | $P \Rightarrow R$ | (1.70) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |

から (1.70) がトートロジーであることが分かります.
　または以下のように同値式として変形して示すこともできます.

$$
\begin{aligned}
\text{（与式）} &\overset{(*)}{\equiv} [P \Rightarrow \{Q \wedge (Q \Rightarrow R)\} \Rightarrow (P \Rightarrow R)] \\
&\overset{(**)}{\equiv} [P \Rightarrow (Q \wedge R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R) \\
&\equiv [(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R) \\
&\equiv \neg(P \Rightarrow Q) \vee \neg(P \Rightarrow R) \vee (P \Rightarrow R)
\end{aligned}
$$

において最右辺はトートロジーとなります．実際，命題 $Q$,$R$ に対して

$$Q \vee \neg(R) \vee R$$

は任意の $Q$ に対して真になります．以上で与式がトートロジーであることが分かります.
　上で (*) において，同値式

$$(P \Rightarrow Q_1) \wedge (P \Rightarrow Q_2) \equiv (P \Rightarrow (Q_1 \wedge Q_2))$$

が成立することを，(**) において同値式

$$Q \wedge (Q \Rightarrow R) \equiv Q \wedge R$$

が成立することを用いていることに注意しましょう.

**演習 1.7**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $\#_1 := (P \Rightarrow Q)$ | $\#_2 := (Q \Rightarrow R)$ | $\#_1 \wedge \#_2$ | $P \Rightarrow R$ | (1.21) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $T$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |

から (1.21) がトートロジーであることが分かります.

**演習 1.8** 章末問題 II です.

**演習 1.9** 章末問題 IV にあります.

**演習 1.10** 任意の $x \in X$ に対して

$$\begin{aligned}(h \circ g) \circ f(x) &= (h \circ g)\,(f(x)) \\ &= h\,(g\,(f(x)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h \circ (g \circ f)\,(x) &= h\,(g \circ f(x)) \\ &= h\,(g\,(f(x)))\end{aligned}$$

から

$$(h \circ g) \circ f(x) = h \circ (g \circ f)\,(x)$$

であることが分かります．これは

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

を意味します.

**演習 1.11** 例えば $X = \mathbf{R}$ 上の命題関数

$$P(x): \quad x > -1$$

$$Q(x): \quad x < 1$$

が反例となります.

**演習 1.12**

$$
\begin{aligned}
\exists x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) &\equiv \exists x \in X\,(\neg(P(x)) \vee Q(x)) \\
&\equiv \exists x \in X\,(\neg(P(x))) \vee \exists x \in X\,(Q(x)) \\
&\equiv (\forall x \in X\,(P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X\,(Q(x)))
\end{aligned}
$$

**演習 1.13**

$$
\begin{aligned}
(1.42) &\overset{(*)}{\equiv} \neg\,(\exists x \in X\,(P(x)) \wedge \exists x \in X\,(Q(x))) \Rightarrow \neg\,(\exists x \in X\,(P(x) \wedge Q(x))) \\
&\overset{(**)}{\equiv} (\forall x \in X\,(\neg P(x)) \vee \forall x \in X\,(\neg Q(x))) \Rightarrow \forall x \in X\,((\neg P(x)) \vee (\neg Q(x)))
\end{aligned}
$$

において，(1.40) から最右辺が真であることが分かりますから，(1.42) が真であることが従います．

**演習 1.14**

$$
\begin{aligned}
&\forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x \in X\,(P(x))) \Rightarrow (\forall x \in X\,(Q(x)))) \\
&\overset{(i)}{\equiv} (\forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x \in X\,(P(x))) \Rightarrow \forall x \in X\,(Q(x)) \\
&\equiv \forall x \in X\,((P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (P(x))) \Rightarrow \forall x \in X\,(Q(x)) \\
&\overset{(ii)}{\equiv} \forall x \in X\,(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X\,(Q(x)) \\
&\equiv (\forall x \in X(P(x)) \wedge \forall x \in X(Q(x))) \Rightarrow \forall x \in X(Q(x))
\end{aligned}
$$

となります．最右辺が常に真となるのは，一般に命題 $P$, $Q$ に対して

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

が常に真となることから容易に示せます．上で (i) は同値式

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R \tag{1.71}$$

を用いました．他方 (ii) では恒等式

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge Q \tag{1.72}$$

を用いました．

**演習 1.15**　同値式

$$
\begin{aligned}
&\forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\exists x \in X\,(P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X\,(Q(x))))\\
&\equiv \forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\neg\,(\exists x \in X\,(Q(x)))) \Rightarrow (\neg\,(\exists x \in X\,(P(x)))))\\
&\equiv \forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in X \neg\,(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg\,(P(x)))\\
&\equiv (\forall x \in X\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x \in X \neg\,(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg\,(P(x)))\\
&\equiv \forall x \in X\,((P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg\,(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg\,(P(x)))\\
&\equiv \forall x \in X\,((\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)) \wedge \neg\,(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg\,(P(x)))\\
&\equiv \forall x \in X\,((\neg Q(x)) \wedge (\neg P(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg\,(P(x)))\\
&\equiv (\forall x \in X(\neg Q(x)) \wedge \forall x \in X(\neg P(x))) \Rightarrow \forall x \in X(\neg P(x))
\end{aligned}
$$

の最右辺が常に真であることが容易に示せます.

**演習 1.16** 右の表から

$$
\begin{aligned}
\forall y \in Y \left(x^2 + y < 20\right) &\equiv (x = 1, 2, 3)\\
\exists y \in Y \left(x^2 + y < 20\right) &\equiv (x = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}
$$

であることが分かります．従って各命題の真偽が以下のように求められます.

**(1)** $\forall x \in X \forall y \in Y(x^2 + y < 20) \equiv F$
**(2)** $\forall x \in X \exists y \in Y(x^2 + y < 20) \equiv F$
**(3)** $\exists x \in X \forall y \in Y(x^2 + y < 20) \equiv T$
**(4)** $\exists x \in X \exists y \in Y(x^2 + y < 20) \equiv T$

| $y \backslash x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 | 10 | 17 | 26 |
| 2 | 3 | 6 | 11 | 18 | 27 |
| 3 | 4 | 7 | 12 | 19 | 28 |
| 4 | 5 | 8 | 13 | 20 | 29 |
| 5 | 6 | 9 | 14 | 21 | 30 |

**演習 1.17 (1)**

$$\neg\left(\forall x \in X \forall y \in Y(x^2 + y < 20)\right) \exists x \in X \exists y \in Y\left(x^2 + y \geq 20\right)$$

**(2)**

$$\neg\left(\forall x \in X \exists y \in Y(x^2 + y < 20)\right) \exists x \in X \forall y \in Y\left(x^2 + y \geq 20\right)$$

**(3)**

$$\neg\left(\exists x \in X \forall y \in Y(x^2 + y < 20)\right) \forall x \in X \exists y \in Y\left(x^2 + y \geq 20\right)$$

**(4)**

$$\neg\left(\exists x \in X \exists y \in Y(x^2 + y < 20)\right) \forall x \in X \forall y \in Y\left(x^2 + y \geq 20\right)$$

## 2018 年 4 月 6 日小テスト解答

**I** 次の同値式を示せ.

$$\neg(P_1 \vee P_2) \equiv \neg(P_1) \wedge \neg(P_2)$$

**解答**

| $P_1$ | $P_2$ | $P_1 \vee P_2$ | $\neg(P_1 \vee P_2)$ | $\neg(P_1)$ | $\neg(P_2)$ | $\neg(P_1) \wedge \neg(P_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F | F | F |
| T | F | T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | T | F | F |
| F | F | F | T | T | T | T |

から

$$\neg(P_1 \vee P_2) \equiv \neg(P_1) \wedge \neg(P_2)$$

が分かります.

**II**

$$\begin{cases} (x^2+y^2-1)\cdot x &= 0 \quad \cdots(1) \\ (x^2+y^2-4)\cdot y &= 0 \quad \cdots(2) \end{cases}$$

**解答**

$$\begin{aligned}
(1)\wedge(2) \Leftrightarrow\ & \bigl(x^2+y^2-1=0 \ \vee \ x=0\bigr) \wedge \bigl(x^2+y^2-4=0 \ \vee \ y=0\bigr) \\
\Leftrightarrow\ & (i)\ \bigl(x^2+y^2-1=0 \ \wedge \ x^2+y^2-4=0\bigr) \\
& \vee (ii)\ \bigl(x^2+y^2-1=0 \ \wedge \ y=0\bigr) \\
& \vee (iii)\ \bigl(x=0 \ \wedge \ x^2+y^2-4=0\bigr) \\
& \vee (iv)\ (x=0 \ \wedge \ y=0) \\
\Leftrightarrow\ & (i)F \ \vee (ii)(x,y)=(\pm1,0) \ \vee (iii)(x,y)=(0,0) \ \vee (iv)(x,y)=(0,\pm2) \\
\Leftrightarrow\ & (x,y)=(\pm1,0),(0,0),(0,\pm2)
\end{aligned}$$