3.5　3 次の行列式（補足）

3.5.1　列に関する基本性質

この余因子展開を用いると行列式の列に関する基本的な性質をいくつか導くことができます.

(I) (各列に関する線型性) 例えば 1 列に関して

$$\begin{vmatrix} \lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{\alpha} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vec{\beta} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

が成立します.

この性質は 2 次正方行列の性質と同様に証明できます．そのためには次の補助定理 3.1 を用います.

補助定理 3.1. $F:\ \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}\quad \vec{x} \mapsto a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ は

$$F(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$$

を満たします.

演習 3.4. 補助定理 *3.1* を証明して，(3.19) を示しましょう.

(II) (交代性) 相異なる 2 列を交換すると行列式の値は (−1) 倍されます．例えば

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} \tag{3.20}$$

が成立します.

2 次正方行列に対する行列式の交代性を用いて，(3.20) を証明します．実際

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} &= c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= -c_1\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - c_3\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{c} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

と証明されます.

最後に次の性質 **(III)** は具体的に計算すれば示せます.

(III) **(正規性)** 単位行列 I_3 の行列式は

$$|I_3| = 1$$

となります.

基本性質から導かれる性質　以上の (I)，(II)，(III) が行列式の基本的な性質です．これからいくつかの性質を導くことができます.

(IV) 異なる 2 列が等しいとき行列式の値は 0 となります．例えば

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.21}$$

が成立します.

この場合は 1 列と 2 列を交換すると性質 (II) から

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix}$$

が得られることから，(3.21) が従います.

(V) $i \neq j$ のとき j 列に i 列の λ 倍を加えても行列式の値は変わりません．例えば

$$|\,\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\,| = |\,\vec{a} \quad (\vec{b} + \lambda\vec{a}) \quad \vec{c}\,|$$

が成立します.

これは

$$(\text{右辺}) = |\,\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\,| + \lambda|\,\vec{a} \quad \vec{a} \quad \vec{c}\,| = |\,\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\,|$$

から従います.

3.5.2　行の基本性質

3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の転置行列の行列式

$$\det({}^tA) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

を考えます．具体的に計算すると

$$\det({}^tA) = \det(A) \quad \text{すなわち} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

を得ます．以上で次の定理 3.7 を示しました．

定理 3.7. $A \in M_3(\mathbf{R})$ に対して

$$\det({}^tA) = \det(A) \tag{3.22}$$

が成立します．

これを用いると行に関する余因子展開を導くことができます．

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

とすると以下が示せます．

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

定理 3.7 を用いると，列に関して今まで説明した性質が行の性質についても成立することを示せます．すなわち以下の性質が成立します．

(I)（行に関する線型性）　行列式は各行において線型です．例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

が 2 行の線型性として成立します．

これは転置をしても行列式の値が変わらないことと列に関する線型性を用いると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}) & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & \lambda{}^t\boldsymbol{x}+\mu{}^t\boldsymbol{y} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{x} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{y} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

と証明できます．

(II)（交代性）　相異なる 2 行を交換すると行列式の値は (-1) 倍されます．例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

が成立します．

これは転置をしても行列式の値が変わらないことと列に関する交代性を用いると

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{b} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{c} & {}^t\boldsymbol{b} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

と証明されます．

以上で説明した行に関する性質 **(I)** と **(II)** を用いると次の性質 **(IV)** と性質 **(II)'**，性質 **(V)** が従います．これらは，列に関する同様の性質を導いたのと同様に示すことができます．

(IV) 相異なる 2 行が等しい行列式の値は 0 です．

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix} = 0$$

(V) $i \neq j$ のとき i 行の λ 倍を j 行に加えても行列式の値は変わりません．例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

が成立します.

行列式の具体的な計算方法として，行に関する性質 **(V)** と性質 **(II)** を用いて 1 列の成分が 1 行以外 0 となるように行基本変形するやり方があります．これは定理 3.7 の証明の中でも使ったアイデアですが，加えて余因子展開を用いると 2 次の行列式を計算することに持ち込むことができます．例えば

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2(2\cdot 6 - 2\cdot 3) = -12$$

と計算されます．最後に 3 次から 2 次になっているところは 1 列の余因子展開を用いました.

演習 3.5. 次の行列式の値を求めましょう.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$　*(2)* $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$　*(3)* $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$　*(4)* $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

3.5.3　クラメールの公式

次に x, y, z に関する 3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= \alpha_1 & \cdots(1) \\ a_2x + b_2y + c_2z &= \alpha_2 & \cdots(2) \\ a_3x + b_3y + c_3z &= \alpha_3 & \cdots(3) \end{cases}$$

を考えます．2 元連立方程式に帰着させるために，z を消去します．そのために $(1)\times c_2 - (2)\times c_1$ を考えると

$$\begin{array}{rlll} & a_1c_2x + b_1c_2y & = \alpha_1c_2 & \cdots(1)\times c_2 \\ -) & a_2c_1x + b_2c_1y & = \alpha_2c_1 & \cdots(2)\times c_1 \\ \hline & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y & = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} & \cdots(\mathrm{I}) = (1)\times c_2 - (2)\times c_1 \end{array}$$

を得ます．同様に $(1)\times c_2 - (3)\times c_1$ と $(2)\times c_3 - (3)\times c_2$ を考えると

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots(\mathrm{II}) = (1)\times c_3 - (3)\times c_1$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{III}) = (2) \times c_3 - (3) \times c_2$$

を得ることができます．

$-b_1 \times (\mathrm{III}) + b_2 \times (\mathrm{II}) - b_3 \times (\mathrm{I})$ を 2 列の余因子展開を用いて計算すると

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

が従います．ここで

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.23}$$

より

$$Dx = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \left(\text{ただし} D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)$$

が得られます．したがって $D \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

が得られました．y と z についても同様な解の公式があり，次の定理 3.8 が証明できます．

定理 3.8.（クラメールの公式） $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ のとき連立 1 次方程式 *(1),(2),(3)* の解は

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

で与えられます．

演習 3.6. $a_1 \times$ *(III)* $- a_2 \times$ *(II)* $+ a_3 \times$ *(I)* を計算して定理 *3.8* の y の公式を導いてください．

演習 3.7. 次の連立 1 次方程式をクラメーの公式を用いて解きましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.5.4　クラメールの公式 (2)

列の余因子展開　$A=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に対して余因子展開

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

が成立します．$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ と (i,j) 成分を a_{ij} と表すと

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

となります．ここで A から i 行と j 列を除いた2次正方行列を A_{ij} として，さらに (i,j) 余因子を

$$\tilde{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

と定めます．このとき上の余因子展開は

$$\begin{aligned}|A| &= a_{11}\tilde{A}_{11}+a_{21}\tilde{A}_{21}+a_{31}\tilde{A}_{31} \\ &= a_{12}\tilde{A}_{12}+a_{22}\tilde{A}_{22}+a_{32}\tilde{A}_{32} \\ &= a_{13}\tilde{A}_{13}+a_{23}\tilde{A}_{23}+a_{33}\tilde{A}_{33}\end{aligned}$$

と表すことができます．これを $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ すなわち A の各列を用いて表すと

$$\begin{aligned}|A| &= (\tilde{A}_{11}\ \tilde{A}_{21}\ \tilde{A}_{31})\vec{a}_1 \\ &= (\tilde{A}_{12}\ \tilde{A}_{22}\ \tilde{A}_{32})\vec{a}_2 \\ &= (\tilde{A}_{13}\ \tilde{A}_{23}\ \tilde{A}_{33})\vec{a}_3\end{aligned}$$

となります．ここで A の余因子行列を

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33}\end{pmatrix}$$

と定義すると

$$\tilde{A}A = \begin{pmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33}\end{pmatrix}(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) = \begin{pmatrix}|A| & * & * \\ * & |A| & * \\ * & * & |A|\end{pmatrix} \tag{3.24}$$

であることが分かります．この式の最右辺にある $*$ の成分は 0 となります．例えば A の第 1 列を第 2 列に置き換えて第 1 列で余因子展開すると

$$\begin{aligned}0 = \begin{vmatrix}a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} &= a_{12}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} \\ &= a_{12}\tilde{A}_{11} + a_{22}\tilde{A}_{21} + a_{32}\tilde{A}_{31} \\ &= \begin{pmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31}\end{pmatrix}\vec{a}_2\end{aligned}$$

から $\tilde{A}A$ の $(1,2)$ 成分の $*$ が 0 となることが示せます．以上で次の定理を示しました．

定理 3.9.

$$\tilde{A}A = |A| \cdot I_3$$

行の余因子展開　$A = \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$ の行列式は $|A| = |{}^tA|$ が成立することを用いて

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} \\ &= a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix}b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2\end{vmatrix} \\ &= a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix}b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\end{aligned}$$

この式では転置行列の第 1 列で展開しましたが，同様に転置行列の第 2 列，第 3 列で展開すると

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

と各行の余因子展開が成立することが分かります．各列の余因子展開を A の (i,j) 成分 $A=(a_{ij})$ と余因子 $\tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\tilde{A}_{11} + a_{12}\tilde{A}_{12} + a_{13}\tilde{A}_{13} \\ &= a_{21}\tilde{A}_{21} + a_{22}\tilde{A}_{22} + a_{23}\tilde{A}_{23} \\ &= a_{31}\tilde{A}_{31} + a_{32}\tilde{A}_{32} + a_{33}\tilde{A}_{33}\end{aligned}$$

できます．これを $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ と A の各行を用いて表すと

$$|A| = \mathbf{a}_1 \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} \\ \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{13} \end{pmatrix} = \mathbf{a}_2 \begin{pmatrix} \tilde{A}_{21} \\ \tilde{A}_{22} \\ \tilde{A}_{23} \end{pmatrix} = \mathbf{a}_3 \begin{pmatrix} \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{33} \end{pmatrix}$$

と表現できます．これから

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & * & * \\ * & |A| & * \\ * & * & |A| \end{pmatrix}$$

となります．この式の最右辺の非対角成分は 0 となります．例えば A の第 2 行を第 3 行に置き換えた行列の行列式を第 2 行で展開すると

$$\begin{aligned}0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= -a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{31}\tilde{A}_{21} + a_{32}\tilde{A}_{22} + a_{33}\tilde{A}_{23} \\ &= \mathbf{a}_3 \begin{pmatrix} \tilde{A}_{21} \\ \tilde{A}_{22} \\ \tilde{A}_{23} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

から $(3,2)$ 成分の $*$ が 0 であることが分かります.
　以上で次の定理を示しました.

定理 3.10.

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_3$$

この定理を用いると次の定理を示すことができます.

定理 3.11. 　$|A| \neq 0$ ならば A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

となります.

3.5.5 行列の積と行列式

演習問題解答

演習 3.2

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

に対して，以下を求めましょう．
(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積．
(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交する単位ベクトル．
(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}, \vec{c}$ が張る平行六面体の体積．

解答 (1)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となりますから $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積 S は

$$S = ||\vec{a} \times \vec{b}|| = \sqrt{3}$$

(2) $\vec{a} \times \vec{b}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直ですから，大きさを 1 にした

$$\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が求める単位ベクトルです．
(3) 求める体積を V にすると

$$V = abs\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}\right)$$

となります．他方

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

から $V = 4$ であることが分かります．

演習 3.3

$$||\vec{x} \pm \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 \pm 2(\vec{x}, \vec{y}) + ||\vec{y}||^2 \tag{3.26}$$

を示しましょう.

解答

$$\begin{aligned}
||\vec{x} + \vec{y}||^2 &= (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \quad ((3.27)\text{ から}) \\
&= (\vec{x}, \vec{x} + \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \quad ((3.10)\text{ から}) \\
&= (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) \quad ((3.11)\text{ から}) \\
&= (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \quad ((3.12)\text{ から}) \\
&= ||\vec{x}||^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}) + ||\vec{y}||^2 \quad ((3.13)\text{ から})
\end{aligned}$$

ここで $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{x}||^2 = (\vec{x}, \vec{x}) \tag{3.27}$$

が成立することを用いています.

演習 3.4 以下の補助定理を用いて

$$\begin{vmatrix} \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{\alpha} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vec{\beta} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} \tag{3.28}$$

を示しましょう.

補助定理 $F: \ \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \quad \vec{x} \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ は

$$F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$$

を満たします.

解答

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

が成立しますから

$$F(\vec{x}) = |\vec{x}\ \vec{b}\ \vec{c}|$$

と定めると

$$C_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad C_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad C_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

に対して

$$F(\vec{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$$

となります．従って補助定理から

$$\begin{aligned}|\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}\ \vec{b}\ \vec{c}| &= F(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}) \\ &= \lambda F(\vec{\alpha}) + \mu F(\vec{\beta}) \\ &= \lambda|\vec{\alpha}\ \vec{b}\ \vec{c}| + \mu|\vec{\beta}\ \vec{b}\ \vec{c}|\end{aligned}$$

となります．

演習 3.5 次の行列式の値を求めましょう.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$　**(2)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$　**(3)** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$　**(4)** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -12 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -12 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

(4)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)((c+a)-(b+a)) \\ &= (a-b)(c-a)(b-c) \end{aligned}$$

演習 3.6

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{I}) = (1) \times c_2 - (2) \times c_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{II}) = (1) \times c_3 - (3) \times c_1$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{III}) = (2) \times c_3 - (3) \times c_2$$

において $a_1 \times (III) - a_2 \times (II) + a_3 \times (I)$ を計算して，クラメールの公式の y の公式を導きましょう.

解答

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \cdots (\mathrm{I})$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots (\mathrm{II})$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots (\mathrm{III})$$

において $a_1 \times (\mathrm{III}) - a_2 \times (\mathrm{II}) + a_3 \times (\mathrm{I})$ を計算すると

$$\begin{aligned} &\left(-a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) x \\ &\quad + \left(-a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) y \\ &= -a_3 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となりますが，第 2 列の余因子展開と考えると

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_1 & c_1 \\ \alpha_2 & a_2 & c_2 \\ \alpha_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

から
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
となります．これから $|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| \neq 0$ を用いて
$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$
が導けます．

演習 3.7 次の連立 1 次方程式をクラメールの公式を用いて解きましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

解答 (1)
$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$
からクラメールの公式を適用できて
$$x = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 7 & -13 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -\frac{49}{10}$$
$$y = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\cdot(-1)\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$
$$z = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

(2)
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

からクラメールの公式を適用できて,

$$x = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} = -\frac{13}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

$$z = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

追加演習問題および解答

I（教科書 26p. 演習 1.29 の拡張）
次の $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して
$$L = \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$
を考えます．条件
$$||\vec{p}|| = ||\vec{q}|| = 1,\ (\vec{p}, \vec{q}) = 0$$
を満たす $\vec{p}, \vec{q} \in L$ を求めましょう．

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$　**(2)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　**(4)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

解答　**(1)** $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は
$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{a}$$
と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして
$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$
が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した
$$\vec{p} = \frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{||\vec{b} - \vec{w}||}(\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$
が L の正規直交基底となります．
(2) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は
$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p}=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}(\vec{b}-\vec{w})=\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります．
(3) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}=-\frac{1}{4}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b}-\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\3\end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p}=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}(\vec{b}-\vec{w})=\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\3\end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります．
(4) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}=\frac{2}{4}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b}-\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p}=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}(\vec{b}-\vec{w})=\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります.

II（I の続き）I の $\vec{p},\vec{q}$ を用いて

$$||\vec{c}-x\vec{a}-y\vec{b}||^2$$

を最小にする $x,y\in\mathbf{R}$ を求めましょう.

(1) $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$　**(2)** $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$　**(3)** $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$　**(4)** $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

解答　$\vec{p},\vec{q}$ と $\vec{a},\vec{b}$ の間に関係

$$\begin{aligned}\vec{p}&=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}\\ \vec{q}&=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}\left(\vec{b}-\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}\right)\end{aligned}$$

があることに注意しましょう．従って

$$(\vec{p}\ \vec{q})=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}\frac{1}{||\vec{a}||} & -\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}\cdot\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\\ 0 & \frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}\end{pmatrix}$$

が成立します．この等式の右辺に現れる行列を S とすると S は正則となります.

$$\begin{aligned}\xi\vec{p}+\eta\vec{q}&=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})S\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\\ &=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

から

$$S\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad 従って\quad \begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=S^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

が成立します．以上から任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して一意的に $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ が存在して

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q}$$

が成立します．以下ではこのことを用います．すなわち

$$\begin{aligned}
||\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2 &= ||\vec{c} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}||^2 \\
&= ||\vec{c}||^2 + \xi^2||\vec{p}||^2 + \eta^2||\vec{q}||^2 - 2\xi(\vec{c}, \vec{p}) - 2\eta(\vec{c}, \vec{q}) \\
&= ||\vec{c}||^2 + \xi^2 - 2\xi(\vec{c}, \vec{p}) + +\eta^2||\vec{q}||^2 - 2\eta(\vec{c}, \vec{q}) \\
&= (\xi - (\vec{c}, \vec{p}))^2 + (\eta - (\vec{c}, \vec{q}))^2 + ||\vec{c}||^2 - (\vec{c}, \vec{p})^2 - (\vec{c}, \vec{q})^2
\end{aligned}$$

から

$$\xi = (\vec{c}, \vec{p}), \quad \eta = (\vec{c}, \vec{q})$$

のとき $||\vec{x} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}||^2$ は最小となります．

(1)

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

であることが I で示されています．これから

$$\xi = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right) = -\frac{5}{\sqrt{42}}$$

のとき最小値をとることが分かります．このとき

$$\begin{aligned}
&x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q} \\
&\qquad = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{\sqrt{42}} \cdot \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{2}{14} \\ 1 & 1 & \frac{3}{14} \\ 1 & -1 & -\frac{13}{14} \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{2}{14} \\ 0 & -1 & \frac{5}{14} \\ 0 & -3 & \frac{15}{14} \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{2}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{14} \\ 0 & -3 & \frac{15}{14} \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{8}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

から

$$x = \frac{4}{7}, \quad y = -\frac{5}{14}$$

であることが分かります.
注意 $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{42}}\cdot\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{42}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{5}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\ -\frac{5}{14}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます.
(2)

$$\vec{p}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$$

であることが I で示されています．これから

$$\xi=\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \eta=\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 3\end{pmatrix}\right)=\frac{3}{\sqrt{34}}$$

のとき最小値をとることが分かります．このとき

$$\begin{aligned}x\vec{a}+y\vec{b}&=\xi\vec{p}+\eta\vec{q}\\ &=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-4\\ 6\\ 13\end{pmatrix}\end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -\frac{4}{17}\\ 0 & 2 & \frac{6}{17}\\ -1 & 1 & \frac{13}{17}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -\frac{4}{17}\\ 0 & 2 & \frac{6}{17}\\ 0 & 3 & \frac{9}{17}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -\frac{4}{17}\\ 0 & 1 & \frac{3}{17}\\ 0 & 3 & \frac{9}{17}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -\frac{10}{17}\\ 0 & 1 & \frac{3}{17}\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

から

$$x=-\frac{10}{17},\quad y=\frac{3}{17}$$

であることが分かります.
注意 $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{34}}\cdot\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{34}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{34}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{34}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{3}{\sqrt{34}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{10}{17}\\ \frac{3}{17}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます.

(3)

$$\vec{p}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\3\end{pmatrix}$$

であることが I で示されています．これから

$$\xi=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2},\quad \eta=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\3\end{pmatrix}\right)=\frac{5}{\sqrt{44}}$$

のとき最小値をとることが分かります．このとき

$$\begin{aligned}x\vec{a}+y\vec{b}&=\xi\vec{p}+\eta\vec{q}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{\sqrt{44}}\cdot\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}9\\4\\-1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&\frac{9}{11}\\1&0&\frac{4}{11}\\1&-1&-\frac{1}{11}\\-1&1&\frac{1}{11}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}0&1&\frac{5}{11}\\1&0&\frac{4}{11}\\0&1&\frac{5}{11}\\0&-1&-\frac{5}{11}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&\frac{4}{11}\\0&1&\frac{5}{11}\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

から

$$x=\frac{4}{11},\quad y=\frac{5}{11}$$

であることが分かります．

注意 $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{4}{\sqrt{44}}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\\0&\frac{4}{\sqrt{44}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{44}}\\0&\frac{4}{\sqrt{44}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{44}}\\0&\frac{4}{\sqrt{44}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{\sqrt{44}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{11}\\\frac{5}{11}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます．

(4)

$$\vec{p}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$$

であることが I で示されています．これから

$$\xi=\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)=-\frac{1}{2},\quad \eta=\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}\right)=\frac{3}{\sqrt{20}}$$

のとき最小値をとることが分かります．このとき

$$\begin{aligned}x\vec{a}+y\vec{b}&=\xi\vec{p}+\eta\vec{q}\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{3}{\sqrt{20}}\cdot\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\\7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&-\frac{1}{10}\\1&0&-\frac{4}{10}\\1&2&\frac{2}{10}\\-1&1&\frac{7}{10}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}0&1&\frac{3}{10}\\1&0&-\frac{4}{10}\\0&2&\frac{6}{10}\\0&1&\frac{3}{10}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&-\frac{4}{10}\\0&1&\frac{3}{10}\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

から

$$x=-\frac{4}{10},\quad y=\frac{3}{10}$$

であることが分かります．

注意 $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{2}{\sqrt{20}}\cdot\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{\sqrt{20}}\\0&\frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{\sqrt{20}}\\0&\frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{10}\\\frac{3}{10}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます．

III $\vec{x},\vec{y}\in\mathbf{R}^n$ が平行でないとします。このとき

$$\vec{x}\not\parallel\lambda\vec{x}+\vec{y},\quad \vec{x}+\vec{y}\not\parallel\vec{x}-\vec{y}$$

であることを示しましょう．

解答

$$c_1\vec{x}+c_2(\lambda\vec{x}+\vec{y})=(c_1+\lambda c_2)\vec{x}+c_2\vec{y}=\vec{0}$$

とします．このとき $\vec{x} \nparallel \vec{y}$ から

$$\begin{cases} c_1 & + & \lambda c_2 & = & 0 \\ & & c_2 & = & 0 \end{cases}$$

が従います．ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

に注意すると $c_1 = c_2 = 0$ が従います．従って

$$\vec{x} \nparallel \lambda\vec{x} + \vec{y}$$

であることが分かります．他方

$$c_1(\vec{x}+\vec{y}) + c_2(\vec{x}-\vec{y}) = (c_1+c_2)\vec{x} + (c_1-c_2)\vec{y} = \vec{0}$$

とします．このとき $\vec{x} \nparallel \vec{y}$ から

$$\begin{cases} c_1 & + & c_2 & = & 0 \\ c_1 & - & c_2 & = & 0 \end{cases}$$

が従います．ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

に注意すると $c_1 = c_2 = 0$ が従います．従って

$$\vec{x}+\vec{y} \nparallel \vec{x}-\vec{y}$$

であることが分かります．

IV $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ は平行でないとします：

$$\vec{a} \nparallel \vec{b}$$

このとき

$$\vec{\alpha} = x\vec{a} + y\vec{b}, \quad \vec{\beta} = z\vec{a} + w\vec{b}$$

とするとき

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix} \neq 0$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$\begin{aligned} c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} &= c_1(x\vec{a} + y\vec{b}) + c_2(z\vec{a} + w\vec{b}) \\ &= (xc_1 + zc_2)\vec{a} + (yc_1 + wc_2)\vec{b} = \vec{0} \end{aligned}$$

とします．$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$\begin{cases} xc_1 + zc_2 & = & 0 \\ yc_1 + wc_2 & = & 0 \end{cases} \tag{\#}$$

が従います．

ここで $\left|\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ ならば (#) から $c_1 = c_2 = 0$ が導けますから

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$$

が従います．他方

$$\left|\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right| = 0$$

ならば (#) を満たす $c_1, c_2 \in \mathbf{K}$ で $c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$ を満たすものが存在して

$$c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} = \vec{0}$$

が成立します．これは

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$$

を意味します．