

写像の単射・全射問題

以下を $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし、

$$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 5, f(5) = 1$$

で、 f が単射か

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

と表わす。

$$I \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

と表す。

(1) f, g が単射か、全射か判定せよ。

(2) $f \circ g, g \circ f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ と表せ。

(3) $f(\{1, 2, 3, 4, 5\}), g(\{1, 2, 3, 4, 5\})$ と表せ。

$$II \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x+1 \quad y \mapsto x^2-2$$

1. $f \circ g, g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ と表せ。

III $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ が単射と可逆。

$g \circ f: X \rightarrow Z$ が単射と可逆 \Leftrightarrow と示せ、

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

と表せ。

IV

$$f: \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$

$$x \longmapsto \frac{x-1}{x-3}$$

well-defined (定義域に注意), 全射, 単射を示す

f^{-1} は存在.

$$V \quad f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

この f は全単射であることに注意する. f^{-1} は存在する.

$$VI \quad f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\} \text{ は全単射であることが}$$

示される.