直交補空間

$V(\subset \mathbb{R}^n)$ が $\mathbb{R}^n$ の部分空間とします。このとき、

$$V^\perp := \{\vec{w} \in \mathbb{R}^n ; (\vec{v}, \vec{w}) = 0 \ (\forall \vec{v} \in V)\}$$

を V の直交補空間と呼びます。$\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in V^\perp$ とすると $\vec{v} \in V$ に対して

$$(\vec{v}, \lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2) = \lambda(\vec{v}, \vec{w}_1) + \mu(\vec{v}, \vec{w}_2)$$
$$= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

から $\lambda\vec{w}_1 + \mu\vec{w}_2 \in V^\perp$ が従います。よって $V^\perp$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間であることが分かります。

GSの直交化を用いると V の正規直交基底が作れて、V への直交射影 P_V が作れました。V の正規直交基底が $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_l$ のとき、$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$P_V \vec{x} := \sum_{j=1}^{l} (\vec{x}, \vec{p}_j)\vec{p}_j$$

と定めると (i) $P_V\vec{x} \in V$ (ii) $\vec{x} - P_V\vec{x} \perp V$

が成立することが分かる。(ii)は $1 \leq k \leq l$ のとき

$$(\vec{x} - P_V\vec{x}, \vec{p}_k) = (\vec{x}, \vec{p}_k) - \sum_{j=1}^{l}(\vec{x}, \vec{p}_j)(\vec{p}_j, \vec{p}_k)$$
$$= (\vec{x}, \vec{p}_k) - (\vec{x}, \vec{p}_k) = 0$$

から $\vec{x} - P_V\vec{x} \perp V$ が従う。$\vec{v} := P_V\vec{x}$, $\vec{w} = \vec{x} - P_V\vec{x} \in V^\perp$ とすると

$$\vec{x} = \vec{v} + \vec{w} \qquad (\vec{v} \in V, \vec{w} \in V^\perp)$$

が従う。これから

$$\mathbb{R}^n = V + V^\perp$$

となる。

さらに

$$\boxed{\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp}$$

となる. 実際 $\vec{v} \in V$, $\vec{w} \in V^\perp$, $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ とすると $\vec{v} = -\vec{w} \in V^\perp$ となるので $\|\vec{v}\|^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = 0$ から $\vec{v} = 0$, $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ から $\vec{w} = 0$ となる.

$$n = \dim \mathbb{R}^n = \dim V + \dim V^\perp$$

から

$$\dim V^\perp = n - \dim V$$

が従う. 次に

$$\boxed{(V^\perp)^\perp = V}$$

を示す. $\vec{v} \in V$, $\vec{w} \in V^\perp$ とすると

$$(\vec{v}, \vec{w}) = 0$$

となるので $\vec{v} \in V^\perp$ 従って $V \subset (V^\perp)^\perp$ となる.

$\dim V = l$ とおくと $\dim V^\perp = n - l$, $\dim (V^\perp)^\perp = n - (n-l) = l$ から

$$V = (V^\perp)^\perp.$$

次に $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ m 行 n 列の行列について考える.

$$y \in (\mathrm{Im}\, A)^\perp \iff (\vec{y}, A\vec{x}) = 0 \quad (\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n)$$

$$\iff ({}^t A \vec{y}, \vec{x}) = 0 \quad (\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n)$$

$$\iff {}^t A \vec{y} = \vec{0} \iff y \in \ker({}^t A)$$

から

$$\boxed{(\mathrm{Im}\, A)^\perp = \ker({}^t A)}$$

が成立することが分かる. これから

$$(\ker {}^t A)^\perp = ((\mathrm{Im}\, A)^\perp)^\perp = \mathrm{Im}\, A.$$

${}^tA$ を A と考えると

$$\boxed{\ker(A)^{\perp} = \mathrm{Im}({}^tA)}$$

が従うことに注意する.

次に 2つの部分空間 $V, W\ (\subset \mathbb{R}^n)$ が $V \subset W$ を満たすとする

$$\boxed{V \subset W \Longrightarrow V^{\perp} \supset W^{\perp}}$$

実際 $\vec{y} \in W^{\perp}$ とすると $\vec{v} \in V$ に対して $\vec{v} \in W$ なので $(\vec{y}, \vec{v}) = 0$

従って $\vec{y} \in V^{\perp}$ となる.

最後に次の定理を示す.

<u>定理</u> $V_1, V_2\ (\subset \mathbb{R}^n)$ が部分空間とする.

(i) $(V_1 + V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

(ii) $(V_1 \cap V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} + V_2^{\perp}$

(i) $V_1 \subset V_1 + V_2$, $V_2 \subset V_1 + V_2$ から $V_1^{\perp} \supset (V_1+V_2)^{\perp}$, $V_2^{\perp} \supset (V_1+V_2)^{\perp}$

従って $(V_1+V_2)^{\perp} \subset V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$. $\vec{x} \in V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}$ とすると.

$\vec{v_1} \in V_1$, $\vec{v_2} \in V_2$ のとき $(\vec{x}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{x}, \vec{v}_1) + (\vec{x}, \vec{v}_2) = 0 + 0 = 0$

から $\vec{x} \in (V_1 + V_2)^{\perp}$ 従って $V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp} \subset (V_1+V_2)^{\perp}$. 以上から

$$(V_1 + V_2)^{\perp} = V_1^{\perp} \cap V_2^{\perp}.$$

(ii) $V_1 = W_1^{\perp}$, $V_2 = W_2^{\perp}$ とする. ($W_1 = V_1^{\perp}$, $W_2 = V_2^{\perp}$ とする)

$$V_1 \cap V_2 = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp} \underset{(i)}{=} (W_1 + W_2)^{\perp}$$

から

$$(V_1 \cap V_2)^{\perp} = W_1 + W_2 = V_1^{\perp} + V_2^{\perp}$$