QR分解

例1　$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ とします. 3本のベクトルの

第2,3,4成分について考えると $\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix} = 2 \neq 0$ となるので

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ はLIであることがわかります. $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ の正規直交基底を

GSの直交化を用いて求めます.　→ (小さい行列式)

$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

これから $\vec{p}_1 \in L(\vec{a}_1)$, $\|\vec{p}_1\| = 1$ と

$$\boxed{\vec{a}_1 = 2\vec{p}_1 \quad \cdots ①}$$

$\vec{a}_2$ の $\vec{a}_1$ 方向への直交射影 $\vec{v}_2$ は

$$\vec{v}_2 = (\vec{a}_2, \vec{p}_1)\vec{p}_1 = \vec{p}_1$$

$\vec{a}_1$ に垂直な $\vec{a}_2 - \vec{v}_2 = \vec{a}_2 - \vec{p}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\1\end{pmatrix}$

を正規化して $\vec{p}_2 = \frac{1}{\|\vec{a}_2 - \vec{p}_1\|}(\vec{a}_2 - \vec{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{a}_2 - \vec{p}_1) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\1\end{pmatrix}$

とすると $\vec{p}_1 = * \, \vec{a}_1$ から $\vec{p}_2 \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$. さらに

$$\|\vec{p}_2\| = 1, \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0$$

$$\boxed{\vec{a}_2 = \vec{p}_1 + \sqrt{3}\,\vec{p}_2 \quad \cdots ②}$$

逆に①,②から $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ から $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \subset L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ 従って $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$

が成立します. $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ から $L(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \subset L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$

となります. 次に $\vec{a}_3$ の $\underline{L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}$ への直交射影 $\vec{v}_3$ について

考えます. $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ は $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ の正規直交基底なので,

$$\begin{aligned}
\vec{v}_3 &= (\vec{p}_1, \vec{a}_3)\vec{p}_1 + (\vec{p}_2, \vec{a}_3)\vec{p}_2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\vec{p}_1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\vec{p}_2 \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\vec{p}_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{p}_2}_{\downarrow \ \vec{v}_3 \in L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{12}\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}4\\0\\4\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ に垂直な $\vec{a}_3 - \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ②

を正規化して

$$\vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{6}}(\vec{a}_3 - \vec{v}_3) = \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\vec{a}_3 - \frac{1}{2}\vec{p}_1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{p}_2\right)$$

から

$$\boxed{\vec{a}_3 = \frac{1}{2}\vec{p}_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{p}_2 + \frac{\sqrt{6}}{3}\vec{p}_3 \quad \cdots ③}$$

となります。このとき $\|\vec{p}_3\| = 1$, $(\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0$ が成立します。

最後に

$$(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

が成立することに注意します。これを $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ の QR分解 と呼びます。「数値解析」で学ぶ人も多いはずです

$L(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = L(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ であったことに注意します。

③から $\vec{a}_3 \in L(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$ が従うので $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \subset L(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$

となります

$\vec{v}_3 \in L(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ から $\vec{a}_3 - \vec{v}_3 \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$

$\vec{p}_3 = *(\vec{a}_3 - \vec{v}_3) \in L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ から $L(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \subset L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$

以上から $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ となります。

注 $\dim L(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = 3$ が $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ が正規直交系であることから分かります。これと $L(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) \subset L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_2)$ から "$=$" が従います。