3次正方行列の正則性

単位行列 3次正方行列 $I_3 := (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を

3次の単位行列と呼びます。

$$\boxed{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ に対して } \quad I_3 \vec{v} = \vec{v}}$$

が成立します。これは $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると

$$I_3 \vec{v} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{v}$$

と示せます。

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{3次正方行列 } A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \text{ 従って } \vec{a}_j \in \mathbb{R}^3 \text{ に対して} \\ I_3 A = A \end{array}}$$

これは $I_3 A = (I_3 \vec{a}_1\ I_3 \vec{a}_2\ I_3 \vec{a}_3) = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) = A$.

N.B. $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_\ell) \in M_{3,\ell}$ を3行ℓ列とします（このとき $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^3$）.
この場合も $I_3 A = A$ が成立します。

問 これを示せ。

$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ を3列の行列とします（ $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^n$ ）.
このとき

$$A \vec{e}_1 = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a}_1$$

$$A \vec{e}_2 = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a}_2$$

$$A \vec{e}_3 = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a}_3$$

が成立します。このとき以下が成立します。

$$\boxed{A I_3 = A \qquad (A \in M_{n,3}(\mathbb{R}))}$$

実際、$AI_3 = (A\vec{e_1}\ A\vec{e_2}\ A\vec{e_3}) = (\vec{a_1}\ \vec{a_2}\ \vec{a_3}) = A$.

正則行列 3次正方行列 $A \in M_3(\mathbb{R})$ が正則であるとは

$$AX = XA = I_3$$

を満たす $X \in M_3(\mathbb{R})$ が存在するときです.

Xは存在するならば一意的です. i.e

$$AX = XA = I_3,\ AY = YA = I_3 \Rightarrow X = Y.$$

実際

$$X = XI_3 = X(AY) = (XA)Y = I_3Y = Y$$

から $X = Y$ であることが分かります.

正則性の特徴付け $A \in M_3(\mathbb{R})$ に対して

$$A \text{は正則} \Longleftrightarrow \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$$

($\Rightarrow$) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ とします. A^{-1}を左からかけると

$$A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

さらに $A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = I_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ となるので $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ が分かります.

($\Leftarrow$) 一般に $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は L I} \Longleftrightarrow (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \to \cdots \to (\vec{e_1}\ \vec{e_2}\ \vec{e_3})$$

であることを示しています.

$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0} \right)$ は $A=(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ とするとき

$\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ がLIであることと同じです!! 従って

$$(\vec a_1\ \vec a_2\ \vec a_3) \to \cdot \to (\vec e_1\ \vec e_2\ \vec e_3)$$

と行基本変形できます。この計算を用いて

$$(\vec a_1\ \vec a_2\ \vec a_3 \mid \vec e_1\ \vec e_2\ \vec e_3) \to \cdots \to (\vec e_1\ \vec e_2\ \vec e_3 \mid \vec{\tilde e}_1\ \vec{\tilde e}_2\ \vec{\tilde e}_3)$$

と $\vec{\tilde e}_1,\vec{\tilde e}_2,\vec{\tilde e}_3 \in \mathbb{R}^3$ を定めます。1〜3列と4列を用いると

$$(\vec a_1\ \vec a_2\ \vec a_3 \mid \vec e_1) \to \cdot \to (\vec e_1\ \vec e_2\ \vec e_3 \mid \vec{\tilde e}_1)$$

から $x\vec a_1+y\vec a_2+z\vec a_3=\vec e_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{\tilde e}_1$

が従います。これから

$$(\vec a_1\ \vec a_2\ \vec a_3)\vec{\tilde e}_1=\vec e_1 \quad \text{i.e.} \quad A\vec{\tilde e}_1=\vec e_1$$

であることが分かります。1〜3列と5列、1〜3列と6列により

$$A\vec{\tilde e}_2=\vec e_2,\quad A\vec{\tilde e}_3=\vec e_3$$

も成立することが従います。まとめると

$$AB=(A\vec{\tilde e}_1\ A\vec{\tilde e}_2\ A\vec{\tilde e}_3)=(\vec e_1\ \vec e_2\ \vec e_3)=I_3$$

が分かります。行基本変形の逆は行基本変形なので

$$(I_3 \mid B)\to\cdots\to(A \mid I_3)$$

列の並びをかえて

$$(B \mid I_3)\to\cdot\to(I_3 \mid A)$$

と行基本変形を得ます。これから

$$BA=I_3$$

が従います。

以上で $AB = BA = I_3$ が分かり A が正則であることが示されました。

__まとめ__ $(A|I_3) \to \cdots \to (I_3|B)$ と行基本変形できると

$$A^{-1}=B, \quad B^{-1}=A$$

__定理__ $A \in M_3(\mathbb{R})$ とします。

(i) A は正則 i.e. $\exists X \in M_3(\mathbb{R})$ $AX = XA = I_3$

$\Leftrightarrow$ (ii) $\exists X \in M_3(\mathbb{R})$ $AX = I_3$

$\Leftrightarrow$ (iii) $\exists X \in M_3(\mathbb{R})$ $XA = I_3$

(i) $\Rightarrow$ (iii) 明らか。

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ とすると $XA\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X\vec{0} = \vec{0}$

で $XA = I_3$ から $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ が従います。前定理から A は正則になります。

(i) $\Rightarrow$ (ii) 明らか。

(ii) $\Rightarrow$ (i) (i) $\Leftrightarrow$ (iii) がすでに示されていてこれを X に対して使うと X は正則である。$XA = I_3$ に X^{-1} を左からかけると

$$X^{-1}XA = X^{-1}I_3 = X^{-1} \quad \text{から} \quad A = X^{-1}$$

が分かります。$AX = X^{-1}X = I_3$ も分かり (i) が分かります。