順列の符号（置換の符号）（続き）

V001, 20230930

<u>n = 2 のとき.</u>　$S_2 = \{ (1\ 2), (2\ 1) \}$ に対して

$$\varepsilon(1\ 2) = 1, \quad \varepsilon(2, 1) = -1$$

と定める.

<u>n = 3 のとき.</u>　$S_3 = \{ (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (2\ 1\ 3), (2\ 3\ 1), (3\ 1\ 2), (3\ 2\ 1) \}$

帰納的に定義する.

$$\sigma = (i_1\ i_2\ i_3) \in S_3$$

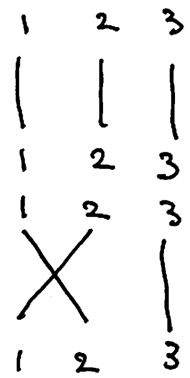
とする.

<u>$i_3 = 3$ のとき.</u>　$\varepsilon(i_1\ i_2\ 3) = \varepsilon(i_1\ i_2)$

具体的には

$$\varepsilon(1\ 2\ 3) = \varepsilon(1\ 2) = 1$$

$$\varepsilon(2\ 1\ 3) = \varepsilon(2\ 1) = -1$$



<u>$i_3 \neq 3$ のとき</u>　$i_1 = 3$ OR $i_2 = 3$ となる.

$i_1 = 3$ のとき　$\varepsilon(3, i_2, i_3) := -\varepsilon(i_3\ i_2, 3) = -\varepsilon(i_3, i_2)$

$i_2 = 3$ のとき　$\varepsilon(i_1, 3, i_3) := -\varepsilon(i_1, i_3, 3) = -\varepsilon(i_3, i_2)$

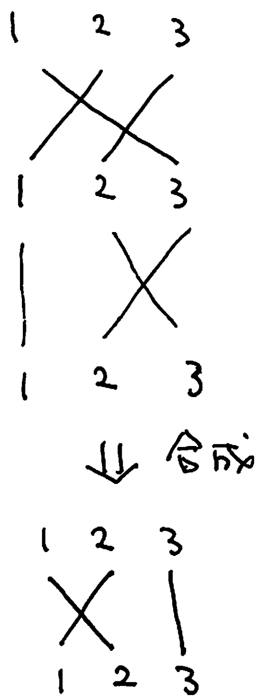
と定義します. $i_1 = 3$ のとき $\{i_2, i_3\} = \{1, 2\}$,

$i_2 = 3$ のとき $\{i_1, i_3\} = \{1, 2\}$

なので<u>帰納的に</u>定義されます.

$i_1=3$ のときの例　$\sigma=(3\ 1\ 2)$ のとき.

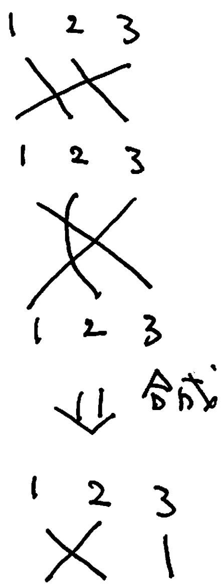
$$\varepsilon(3\ 1\ 2) = -\varepsilon(2\ 1\ 3) = -\varepsilon(2\ 1) = 1$$



問1　$\sigma=(3\ 2\ 1)$ のとき　$\varepsilon(\sigma)$ を求めましょう.

$i_2=3$ のときの例　$\sigma=(2\ 3\ 1)$ のとき.

$$\varepsilon(2\ 3\ 1) = -\varepsilon(2\ 1\ 3) = -\varepsilon(2\ 1) = 1$$



問2　$\sigma=(1\ 3\ 2)$ のとき　$\varepsilon(\sigma)$ を求めましょう.

後に4次行列式を定義するときに大事になりますが,

定理1

$$\varepsilon(i_1\ i_2\ i_3) = -\varepsilon(i_2\ i_1\ i_3)$$

$$\varepsilon(i_1\ i_2\ i_3) = -\varepsilon(i_3\ i_2\ i_1)$$

$$\varepsilon(i_1\ i_2\ i_3) = -\varepsilon(i_1\ i_3\ i_2)$$

が成立します.

$\sigma = (i_1\, i_2\, i_3)$ として $i_3 = 3,\ i_1 = 3,\ i_2 = 3$ の場合に分けて示します.

$i_3 = 3$ のとき. 定義から

$$\varepsilon(i_1\, i_2\, 3) = \varepsilon(i_1\, i_2) = -\varepsilon(i_2\, i_1) = -\varepsilon(i_2\, i_1\, 3) \qquad (1)$$

$$\varepsilon(3\, i_2\, i_1) = -\varepsilon(i_1\, i_2\, 3) \qquad (2)$$

$$\varepsilon(i_1\, 3\, i_2) = -\varepsilon(i_1\, i_2\, 3) \qquad (3)$$

$i_1 = 3$ のとき.

$$\varepsilon(3\, i_2\, i_3) = -\varepsilon(i_3\, i_2\, 3) \overset{(1)}{=} \varepsilon(i_2\, i_3\, 3) = -\varepsilon(i_2\, 3\, i_3) \qquad (4)$$

定義から $\varepsilon(3\, i_2\, i_3) \underset{(2)}{=} -\varepsilon(i_3\, i_2\, 3) \qquad (5)$

$$\varepsilon(3\, i_2\, i_3) \underset{(2)}{=} -\varepsilon(i_3\, i_2\, 3) \overset{(1)}{=} \varepsilon(i_2\, i_3\, 3) \qquad (6)$$

$$\underset{(3)}{=} -\varepsilon(i_2\, 3\, i_3)$$

$i_2 = 3$ のとき.

$$\varepsilon(i_1\, 3\, i_3) \underset{(3)}{=} -\varepsilon(i_1\, i_3\, 3) \overset{(1)}{=} \varepsilon(i_3\, i_1\, 3) = -\varepsilon(3\, i_1\, i_3) \qquad (7)$$

$$\varepsilon(i_1\, 3\, i_3) \underset{(3)}{=} -\varepsilon(i_1\, i_3\, 3) \underset{(1)}{=} \varepsilon(i_3\, i_1\, 3) \underset{(2)}{=} -\varepsilon(3\, i_1\, i_3) \qquad (8)$$

$$\varepsilon(i_1\, 3\, i_3) \underset{(3)}{=} -\varepsilon(i_1\, i_3\, 3) \qquad (9)$$

と証明される. (注意: (7)は(4)と同じ.)

順列は 全単射 $\sigma : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ と同一視されます.

順列の言い換えと積.

σ に対して $(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3))$ が対応します.

これを $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) \end{pmatrix}$ とも表わします.

$\sigma, \tau : \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ が全単射のとき合成 $\tau \circ \sigma$ も全単射になりますから $\tau \circ \sigma$ も順列と考えることができます. $\tau\sigma = \tau \circ \sigma$ と積が定義できます.

6個の順列（置換）のうち

$$(12)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\quad (13)=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\quad (23)=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

を互換と呼びます．(12), (23) を隣接互換と呼びます．

次の定理2が成立します．

定理2 任意の $\sigma\in S_3$ は有限個の互換の積に表わせます．i.e.

$$\sigma=\tau_\ell\cdots\tau_1$$

を満たす互換 $\tau_\ell,\cdots,\tau_1$ が存在します．（0個のときは $\sigma=1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$）

$\sigma=(i_1\ i_2\ i_3)$ とします．

$i_3=3$ のとき．$\sigma=(i_1\ i_2\ 3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\i_1&i_2&3\end{pmatrix}$ で

$i_1=1,\ i_2=2$ のとき　$\sigma=1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$

$i_1=2,\ i_1=1$ のとき　$\sigma=(1\ 2)$

$i_3\neq 3$ とします．

$i_1=3$ のとき．　$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&i_2&i_3\end{pmatrix}$

$$(i_3\ 3)\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\i_3&i_2&3\end{pmatrix}=(i_3\,i_2)$$

から　$\sigma=(i_3\ 3)\circ(i_3\ i_2)$

であることが分かります．ここで $(i_3\ 3)\circ(i_3\ 3)=1$ を用いています．

$i_2=3$ のとき．　$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\i_1&3&i_3\end{pmatrix}$

$$(i_3\ 3)\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\i_1&i_3&3\end{pmatrix}=(i_1\,i_3)$$

から　$\sigma=(i_3\ 3)\circ(i_1\ i_3)$ であることが分かります．

定理1は互換を使うと次のように書き換えることができます.

> **定理1'** $\sigma \in S_3$ に対して $\tau \in S_3$ が互換のときは
> $$\varepsilon(\tau\sigma) = -\varepsilon(\sigma)$$

この定理1'は次の定理3に一般化されます. その前に τ が互換のとき

$$\varepsilon(\tau) = -1$$

であることを確認します.

$$\varepsilon(12) = \varepsilon\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = \varepsilon(12) = -1$$

$$\varepsilon(13) = \varepsilon\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = -\varepsilon\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = -\varepsilon(12) = -1$$

$$\varepsilon(23) = \varepsilon\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = -\varepsilon\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = -\varepsilon(12) = -1$$

となります.

定理1'の系 $\tau_1, \cdots, \tau_\ell \in S_3$ が互換のとき, $\sigma \in S_3$ に対して

$$\varepsilon(\tau_1 \cdots \tau_\ell \sigma) = (-1)^\ell \varepsilon(\sigma)$$

特に $\sigma = 1$ のとき

$$\varepsilon(\tau_1 \cdots \tau_\ell) = (-1)^\ell$$

定理3 $\sigma = \tau_\ell \cdots \tau_1 = \tau'_{\ell'} \cdots \tau'_1$ と $\sigma \in S_3$ を互換の積であらわすとき

$$(-1)^\ell = (-1)^{\ell'}$$

特に ℓ と ℓ' の偶奇は一致します. (偶置換, 奇置換が定義されます)

最後に次の定理4を示します.

定理4　$\sigma_1, \sigma_2 \in S_3$ のとき　$\varepsilon(\sigma_1\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$

本当に最後ですが　$\sigma \in S_3$ に対し

$\varepsilon(\sigma)=1$ のとき　偶置換

$\varepsilon(\sigma)=-1$ のとき　奇置換

と呼びます.