# 置換の符号の交代性

## n=3のとき

**定理**

$$\varepsilon(i_1, i_2, i_3) = -\varepsilon(i_2, i_1, i_3) \quad \text{(i)}$$

$$\varepsilon(i_1, i_2, i_3) = -\varepsilon(i_3, i_2, i_1) \quad \text{(ii)}$$

$$\varepsilon(i_1, i_2, i_3) = -\varepsilon(i_1, i_3, i_2) \quad \text{(iii)}$$

---

Ⓐ まず $i_3=3$ のとき示す。（$i_1=3$, $i_2=3$ の場合はこの場合に持ち込める）

(i) について

$$\varepsilon(i_1, i_2, 3) = \varepsilon(i_1, i_2) = -\varepsilon(i_2, i_1) = -\varepsilon(i_2, i_1, 3)$$

(ii) について

定義から $\varepsilon(3, i_2, i_1) = -\varepsilon(i_1, i_2, 3)$ であるので

$$\varepsilon(i_1, i_2, 3) = -\varepsilon(3, i_2, i_1)$$

(iii) について　(ii) と同様に定義から

$$\varepsilon(i_1, 3, i_2) = -\varepsilon(i_1, i_2, 3)$$

であるので

$$\varepsilon(i_1, i_2, 3) = -\varepsilon(i_1, 3, i_2)$$

⑬ 次に $i_1 = 3$ のとき.

(i) $\varepsilon(3, i_2, i_3) \underset{\text{定義}}{=} -\varepsilon(i_3, i_2, 3) \overset{Ⓐ}{=} \varepsilon(i_2, i_3, 3)$

$\underset{\text{定理}}{=} -\varepsilon(i_2, 3, i_3)$

(ii) $\varepsilon(3, i_2, i_3) \underset{\text{定義}}{=} -\varepsilon(i_3, i_2, 3)$

(iii) $\varepsilon(3, i_2, i_3) \underset{\text{定義}}{=} -\varepsilon(i_3, i_2, 3) \overset{Ⓐ}{=} \varepsilon(i_2, i_3, 3)$

$\underset{\text{定義}}{=} -\varepsilon(3, i_3, i_2)$

ⓒ $i_2 = 3$ のとき. これは省略すること.

一般の $n$ について 置換の符号は 帰納的に

<u>$i_n = n$</u> $\quad \varepsilon(i_1, \cdots, i_{n-1}, n) = \varepsilon(i_1, \cdots, i_{n-1})$

<u>$i_n \neq n$</u> $\quad 1 \leq k \leq n-1$ として $i_n = n$ の場合.

$$\varepsilon(\cdots, i_k = n, \cdots, i_n)$$

$$= -\varepsilon(\cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{番目}}}{i_n}, \cdots, n)$$

と定義します.

**<u>定理</u>** $\quad j < k$ として

$$\varepsilon(\cdots, i_j, \cdots, i_k, \cdots)$$

$$= -\varepsilon(\cdots, i_k, \cdots, i_j, \cdots)$$

<u>証明</u> Ⓐ $i_n = n$ の場合.

① $j < k < n$ の場合は 帰納的に明らか.

$$\varepsilon(\cdots i_j \cdots i_k \cdots i_n = n) = \varepsilon(\cdots i_j \cdots i_k \cdots, i_{n-1})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{帰納法}}}{=} -\varepsilon(\cdots i_k \cdots i_j \cdots, i_{n-1}) = -\varepsilon(\cdots i_k \cdots i_j \cdots, i_n = n)$$

② $i_k = i_n = n$ の場合.

$$\varepsilon(\cdots i_j \cdots, n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{定義}}}{=} -\varepsilon(\cdots, \overset{\substack{j \\ \downarrow}}{n}, \cdots, i_j)$$

$\longleftarrow$

⑬ $i_n \neq n$ の場合.（実は ここが 難かしいところです　どのように定義しても同じことになります.）

以下では $i_\ell = n$, $1 \leq \ell \leq n-1$ とします.

㊍ $\varepsilon(\cdots i_\ell = n \cdots\cdots, i_n) = -\varepsilon(\cdots \overset{n}{\underset{\neq}{i_n}} \cdots\cdots n)$

① $\{j, k\} \cap \{\ell, n\} = \phi$ のとき

㊍の …… …… のところに $i_j, i_k$ があります. Ⓐから $i_j$ と $i_k$ を交換すると $(-1)$ 倍になるので OK です.

(例) $\varepsilon(3, 5, 1, 4, 2) = -\varepsilon(3, 2, 1, 4, 5)$

$= \varepsilon(1, 2, 3, 4, 5)$

$= -\varepsilon(1, 5, 3, 4, 2)$

② $i_j = i_\ell = n$, $i_n \neq i_k$

$\varepsilon(\cdots i_\ell = n \cdots i_k \cdots i_n)$

$= -\varepsilon(\cdots i_n \cdots i_k \cdots \underset{i_j = i_\ell}{\underset{\shortparallel}{n}})$

$\underset{Ⓐ}{=} \varepsilon(\cdots i_k \cdots i_n \cdots n)$

$\underset{定義}{=} -\varepsilon(\cdots i_k \cdots \underset{i_j = i_\ell.}{\underset{\shortparallel}{n}} \cdots i_n)$

③ $i_j = i_n$ , $i_k \neq i_l = n$ のとき.

$$\varepsilon(\cdots i_l = n \cdots i_k \cdots i_j = i_n)$$

$$\underset{\text{定義}}{=} -\varepsilon(\cdots i_j = i_n \cdots i_k \cdots i_l = n)$$

$$= \varepsilon(\cdots i_k \cdots i_j \cdots i_l = n)$$

$$\underset{\text{定義}}{=} -\varepsilon(\cdots i_l = n \cdots i_j = i_n \; i_k)$$

④ $\{j, k\} = \{l, n\}$ のとき. $j < k$ とすると $i_j = i_l$ $i_n = i_k$

$$\varepsilon(\cdots i_j = i_l = n \cdots i_n = i_k)$$

$$\underset{\text{定義}}{=} -\varepsilon(\cdots i_n = i_k \cdots i_j = i_k = n)$$

定理は次の定理を意味します.

<u>定理</u>　$\tau$ が互換であるとき $\sigma \in S_n$

$$\varepsilon(\tau\sigma) = -\varepsilon(\sigma)$$

---

この定理は次の定理に一般化されます. その前に

$\tau$ が互換であるとき

$$\varepsilon(\tau) = -1$$

であることを示します　$\tau = (j\ k)$　$j < k$ とします.

$$\tau = \begin{pmatrix} \cdots & j & \cdots & k & \cdots \\ \cdots & k & \cdots & j & \cdots \end{pmatrix}$$

なので

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon\begin{pmatrix} \cdots & j & \cdots & k \\ \cdots & k & \cdots & j \end{pmatrix} \overset{S_k\text{における定義}}{=} -\varepsilon\begin{pmatrix} \cdots & j & k \\ & j & k \end{pmatrix}$$

$$= -1$$

<u>系</u>　$\tau_1, \ldots, \tau_l \in S_n$ が互換であるとき

$$\varepsilon(\tau_1 \cdots \tau_l \sigma) = (-1)^l \varepsilon(\sigma)$$

特に $\sigma = 1$ のとき

$$\varepsilon(\tau_1 \cdots \tau_l) = (-1)^l$$

<u>定理</u>　$\sigma = \tau_l \cdots \tau_1 = \tau'_{l'} \cdots \tau'_1$ と $\sigma \in S_n$ を互換の積で表わすとき.

$$(-1)^l = (-1)^{l'}$$

特に $l$ と $l'$ の偶奇は一致します.

次に $\sigma \in S_n$ が互換の積として表わせることを示します.

<u>定理</u> $\sigma \in S_n$ に対して互換 $\tau_1, \cdots, \tau_\ell \in S_n$ が存在して

$$\sigma = \tau_\ell \cdots \tau_1$$

と表わせます.

---

(証明) $\sigma = \begin{pmatrix} \cdots & k & \cdots & n \\ \cdots & n & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ すなわち $\sigma(k) = n$

とします.

<u>$k = n$ のとき</u> $\sigma = \begin{pmatrix} \cdots & n-1 \\ \cdots & i_{n-1} \end{pmatrix} \in S_{n-1}$ とみると

帰納法の仮定から

$$\sigma = \tau_\ell \cdots \tau_1$$

と表わせます.

$$(i_n\ n)\sigma = \begin{pmatrix} & n \\ & n \end{pmatrix} \in S_{n-1}$$

なので $(i_n\ n)\sigma = \tau_{\ell-1} \cdots \tau_1$ と互換の積で表わせ

ます. $\tau_\ell = (i_n\ n)$ が $\tau_\ell^2 = 1$ を満たすので

$$\sigma = \tau_\ell \tau_{\ell-1} \cdots \tau_2 \tau_1$$

が成立します.

最後に次の定理を示します.

<u>定理</u>　$\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ のとき　$\varepsilon(\sigma_1 \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$

$\varepsilon(\sigma) = 1$ のとき　$\sigma$ は偶置換

$\varepsilon(\sigma) = -1$ のとき　$\sigma$ は奇置換

と呼びます.