次元定理

A : m行n列　$A \to \cdots \to A_0 = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 & * & 0 & * & & 0 \\ & & 1 & * & 0 & * & & 0 \\ & & & & 1 & * & & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$ $\}$ l行

と行基本変形できる.

定理　$A \to \cdots \to A_0$, $A \to \cdots \to A_1$, A_0, A_1 : 狭義の階段行列

$\Longrightarrow$ $A_0 = A$

列基本変形

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a})$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \lambda & \\ & & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \lambda\vec{b}\ \vec{c})$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a}+\lambda\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

から分かるように

列基本変形 = 基本行列を右からかける

$$A \to \cdots \to A_0 \underbrace{\to \cdots \to}_{列基本変形} \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 & 0 & & 0 & & \\ & & 1 & O & 0 & O & O \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & \end{pmatrix} = A_{00}$$

A_{00} を A の**階数標準形**と呼ぶ.

定理 P : m次正則行列, Q n次正則行列 が存在して

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_l & O \\ \hline O & O \end{array}\right) = A_{00}$$

となる.

これは 基本行列が正則であることから従う.

$$A_{00}\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_l\vec{e}_l$$

から $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_l$ が $\mathrm{Im}(A_{00})$ の基底である. P^{-1} を左からかけると

$$AQ\vec{x} = x_1 P^{-1}\vec{e}_1 + \cdots + x_l P^{-1}_l$$

から $P^{-1}\vec{e}_1, \dots, P^{-1}\vec{e}_l$ が $\mathrm{Im}(AQ)$ の基底である. さらに

$$\mathrm{Im}(AQ) = \mathrm{Im}(A)$$

一般に成立するので(結局) $P^{-1}\vec{e}_1, \dots, P^{-1}\vec{e}_l$ が $\mathrm{Im}(A)$ の基底である.

以上から $\underline{\dim \mathrm{Im}(A) = l}$ が従う

$$A\vec{v} = 0 \iff PA\vec{v} = 0 \iff A_{00}Q^{-1}\vec{v} = \vec{0}.$$

に注意する. $A_{00}\vec{x} = \vec{0} \iff x_1 = \cdots = x_l = 0$

から $\vec{x} = c_{l+1}\vec{e}_{l+1} + \cdots + c_n\vec{e}_n$ がわかる

$$Q^{-1}\vec{v} = c_{l+1}\vec{e}_{l+1} + \cdots + c_n\vec{e}_n$$

から

$$\vec{v} = c_{l+1}Q\vec{e}_{l+1} + \cdots + c_nQ\vec{e}_n$$

となる. $Q\vec{e}_{l+1}, \dots, Q\vec{e}_n$ は LI なので $\boxed{\dim \mathrm{Ker}(A) = l}$

補題 m行n列のAとn次の正則行列Qに対して$\mathbb{K}^m$中

$$\mathrm{Im}(AQ) = \mathrm{Im}(A)$$

$\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$のとき $\exists \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ $\vec{v} = A\vec{w}$

$$= AQ \cdot Q^{-1}\vec{w}$$

から $\vec{w} \in \mathrm{Im}(AQ)$. 従って $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Im}(AQ)$

さらにQ^{-1}は正則なので

$$\mathrm{Im}(AQ) \subset \mathrm{Im}(AQQ^{-1}) = \mathrm{Im}(A)$$

問1 Pがm次正則行列のとき. $\mathbb{R}^n$中.

$$\ker(A) = \ker(PA)$$

を示せ.

問2 Qがn次正則行列のとき

$$\dim \ker(AQ) = \dim \ker(A)$$

であることを示せ.

問3 Pがm次正則行列のとき.

$$\dim(\mathrm{Im}(PA)) = \dim \mathrm{Im}(A)$$

であることを示せ.