

L06, 2024 年 05 月 15 日演習問題解答

I 以下の関数を微分しましょう.

- (1)  $y = f(t) = e^{-2t}$  (2)  $y = f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$  (3)  $y = f(t) = te^t$  (4)  $y = f(t) = t^2e^t$   
 (5)  $y = f(t) = \log(1+t^2)$  (6)  $y = f(t) = t \log(t+1)$  (7)  $y = f(t) = t^2 \log t$

解答 (1)  $y = e^{-2t}$  は  $y = e^u$  と  $u = -2t$  の合成で

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^u \cdot (-2) = -2e^{-2t}$$

(2)  $y = e^{-\frac{1}{2}t^2}$  は  $y = e^u$  と  $u = -\frac{1}{2}t^2$  の合成で

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = e^u \cdot (-t) = -te^{-\frac{1}{2}t^2}$$

(3)

$$f'(t) = (t)'e^t + t(e^t)' = 1 \cdot e^t + te^t = (t+1)e^t$$

(4)

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t^2)'e^t + t^2(e^t)' = 2t \cdot e^t + te^t \\ &= (t^2 + 2t)e^t = t(t+2)e^t \end{aligned}$$

(5)  $y = \log(1+t^2)$  は  $y = \log u$  と  $u = 1+t^2$  の合成で

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{u} \cdot 2t = \frac{2t}{1+t^2}$$

(6)  $y = \log(1+t)$  は  $y = \log u$  と  $u = 1+t$  の合成で

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{u} \cdot 1 = \frac{1}{1+t}$$

さらに  $f(t) := t \log(t+1)$  の微分を計算すると

$$f'(t) = (t)' \log(t+1) + t(\log(t+1))' = \log(t+1) + \frac{t}{t+1}$$

となります.

(7)

$$\begin{aligned} f'(t) &= (t^2)' \log t + t^2(\log t)' = 2t \log t + t^2 \cdot \frac{1}{t} \\ &= 2t(\log t + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

II 以下の関数の増減表を求めましょう.

- (1)  $f(t) = \frac{1}{t} + \log t$  (2)  $f(t) = te^{2t}$

解答 (1)

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t^2}$$

から  $f(t)$  の定義域  $t > 0$  において

$$f'(t) \begin{cases} \geq 0 & \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ t = 1 \\ 0 < t < 1 \end{cases} \end{cases}$$

であることが分かります. よって増減表は

$t$	(0)		1	
$f'(t)$	/	-	0	+
$f(t)$	/	↘	1	↗

であることが分かります.

補足

$$f''(t) = \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t^2} = \frac{2-t}{t^3}$$

から  $f(t)$  の定義域  $t > 0$  において

$$f'(t) \begin{cases} \geq 0 & \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 2 \\ t = 2 \\ t > 2 \end{cases} \end{cases}$$

であることが分かります. よって凹凸を踏める増減

表は

$t$	(0)		1		2	
$f'(t)$	/	-	0	+	+	+
$f''(t)$	/	+	+	+	0	-
$f(t)$	/	↪	1	↩	$\frac{1}{2} + \log 2$	↪

となります。  $t \rightarrow +\infty$  と  $t \rightarrow +0$  の漸近挙動について考えます。

$t \rightarrow +\infty$  のとき

$$\frac{1}{t} \rightarrow 0, \quad \log t \rightarrow +\infty$$

から

$$f(t) = \frac{1}{t} + \log t \rightarrow +\infty$$

であることが分かります。

$t \rightarrow +0$  のとき  $s := \frac{1}{t} \rightarrow +\infty$  となります。そこで

$$\frac{1}{t} + \log t = s - \log s = s \left( 1 - \frac{\log s}{s} \right)$$

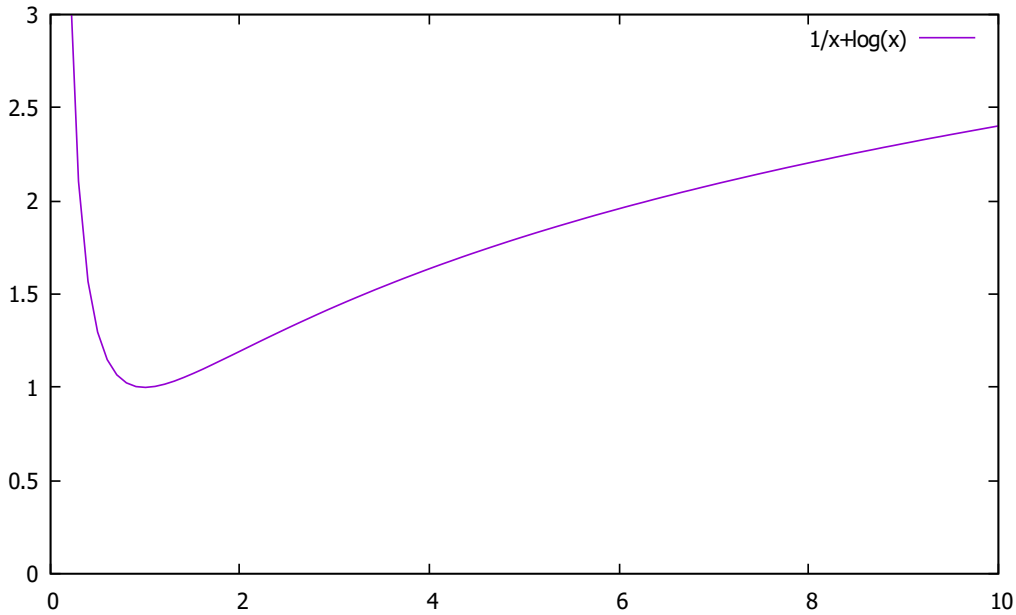
において

$$\frac{\log s}{s} \rightarrow 0 \quad \text{従って} \quad \left( 1 - \frac{\log s}{s} \right) \rightarrow 1 - 0 = 1 > 0$$

となりますから\*1

$$\frac{1}{t} + \log t = s - \log s = s \left( 1 - \frac{\log s}{s} \right) \rightarrow +\infty$$

となります。以上でグラフは以下ようになります。



## 解答 (2)

$$f'(t) = (t)'e^{2t} + t(e^{2t})' = 1 \cdot e^{2t} + t \cdot 2e^{2t} = e^{2t}(2t+1)$$

となりますから増減表は

$t$		$-\frac{1}{2}$	
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗

となります。

**補足**  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$  のときの漸近挙動を調べましょう。

$t \rightarrow +\infty$  のとき

$$t \rightarrow +\infty, \quad e^{2t} \rightarrow +\infty$$

\*1  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log t}{t} = 0$  については、Taylor の定理を学ぶ後に示すことができます。

から

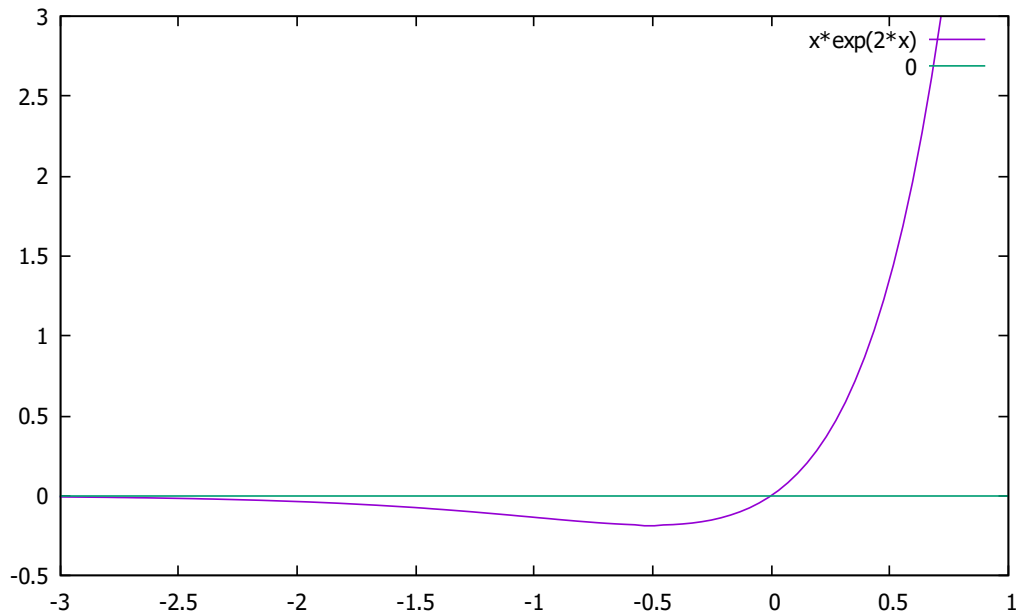
$t \rightarrow -\infty$  のとき  $s = -2t \rightarrow +\infty$  となりますが

$$f(t) = te^{2t} \rightarrow +\infty$$

$$te^{2t} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{s}{e^s} \rightarrow 0$$

が分かります.

が従います. 以上からグラフは以下ようになります.



補足問題  $f''(t)$  を計算して, 凹凸を含めた増減表を求めましょう.