

2020 年 L02 04 月 17 日演習問題解答

I 以下の和を求めましょう。

(1)  $S_n := 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n}$

(2)  $T_n := 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$

Hint:

$$\begin{array}{r} T_n = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots \\ -) \frac{1}{2} T_n = \quad 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots \end{array}$$

(3)  $T_n := 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + n \cdot 3^{n-1}$

解答 (1)

$$\begin{array}{r} S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \\ -) \frac{1}{3} S_n = \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} \\ \hline \frac{2}{3} S_n = 1 \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{3^{n+1}} \end{array}$$

から

$$S_n = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right)$$

が従います。

(2)

$$\begin{array}{r} T_n = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \\ -) \frac{1}{2} T_n = \quad 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + (n-1) \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + n \cdot \frac{1}{2^n} \\ \hline \frac{1}{2} T_n = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 1 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} - n \cdot \frac{1}{2^n} \end{array}$$

から

$$\frac{1}{2} T_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - n \frac{1}{2^n}$$

従って

$$T_n = 4 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) - n \frac{1}{2^{n-1}}$$

となります。

(3)

$$\begin{array}{r} T_n = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + n \cdot 3^{n-1} \\ -) 3T_n = \quad 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1) \cdot 3^{n-1} + n \cdot 3^n \\ \hline -2T_n = 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 + \dots + 1 \cdot 3^{n-1} - n \cdot 3^n \end{array}$$

から

$$-2T_n = \frac{3^n - 1}{3 - 1} - n \cdot 3^n$$

従って

$$T_n = \frac{1 - 3^n}{4} + \frac{1}{2} n \cdot 3^n$$

となります。

II 次の差分方程式を解きましょう.

(1)  $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + 3n - 1$

(2)  $a_0 = 1, a_{n+1} = a_n + 2^n + 2n - 1$

(3)  $a_0 = 6, a_{n+1} = 2a_n - 3$

(4)  $a_0 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2n$

(5)  $a_0 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$

(6)  $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} + 4a_{n+1} - 5a_n = 0$

(7)  $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n = 0$

(8)  $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

解答 (1) 差分方程式を

$$a_{n+1} - a_n = 3n - 1$$

と見ると

$$a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \tag{1}$$

であるので

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + (3 \cdot 0 - 1) + (3 \cdot 1 - 1) + (3 \cdot 2 - 1) + \cdots + (3 \cdot (n-1) - 1) \\ &= 1 + 3(0 + 1 + \cdots + (n-1)) - n \\ &= 1 + 3 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - n = \frac{3n^2 - 5n + 2}{2} \end{aligned}$$

注意 (1) から形式的に

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (3k - 1) = \cdots \end{aligned}$$

と進めるのもいいでしょう。上の解答では意味を理解して欲しくて、わざと面倒くさく書いています。

(2) (1) で示したように

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (2^k + 2k - 1) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + 2 \sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &= 1 + \frac{2^n - 1}{2 - 1} + 2 \frac{(n-1)n}{2} - n = 2^n + n^2 - 2n \end{aligned}$$

(3)  $\lambda = 2\lambda - 3$  を解くと  $\lambda = 3$  であるので

$$a_{n+1} = 2a_n - 3 \tag{2}$$

$$3 = 2 \cdot 3 - 3 \tag{3}$$

において (2)-(3) を考えると

$$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$$

となる.

(4) 差分方程式  $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$  の両辺を  $3^{n+1}$  で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

となる. これから  $\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$  の階差数列を得るので

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{3^n} &= \frac{a_0}{3^0} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a_{k+1}}{3^{k+1}} - \frac{a_k}{3^k}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \\ &= 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 1 + \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \end{aligned}$$

から

$$a_n = 3^n + 3^n - 2^n = 2 \cdot 3^n - 2^n$$

(5) 差分方程式  $a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$  の両辺を  $2^{n+1}$  で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$$

となる. これから  $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$  の階差数列を得るので

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{2^n} &= \frac{a_0}{2^0} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{a_k}{2^k}\right) \\ &= 3 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} \\ &= 3 + \frac{\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} \\ &= 3 - 2 \left(\frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

から

$$a_n = 3^{n+1}$$

別解 差分方程式

$$a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1} \tag{4}$$

の解を（初期条件を考えないで） $a_n = C \cdot 3^n$  の形で求めてみます。すなわち

$$C \cdot 3^{n+1} = 2C \cdot 3^n + 3^{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たす  $C$  を求める。この両辺を  $3^n$  で割ると

$$3C = 2C + 3$$

から  $C = 3$  を得ます。これから

$$3 \cdot 3^{n+1} = 1 \cdot 3 \cdot 3^n + 3^{n+1} \tag{5}$$

が成立することが分かりました。さらに (4)–(5) を考えると

$$a_{n+1} - 3 \cdot 3^{n+1} = 2(a_n - 3 \cdot 3^n)$$

となるので  $\{a_n - 3 \cdot 3^n\}$  は公比 2 の等比数列であることが分かります。よって

$$a_n - 3 \cdot 3^n = 2^n(a_0 - 3 \cdot 3^0) = 2^n(3 - 3) = 0$$

から

$$a_n = 3^{n+1}$$

であることが分かります。

(6) 差分方程式  $a_{n+2} + 4a_{n+1} - 5a_n = 0$  の特性方程式

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

を解くと  $\lambda = -5, 1$  となります。これを用いて方程式を

$$\begin{cases} a_{n+2} + 5a_{n+1} = a_{n+1} + 5a_n \\ a_{n+2} - a_{n+1} = -5(a_{n+1} - a_n) \end{cases}$$

と変形します。これから

$$a_{n+1} + 5a_n = a_1 + 5a_0 \tag{6}$$

$$a_{n+1} - a_n = (-5)^n(a_1 - a_0) \tag{7}$$

が導かれますが、(6)–(7) から

$$6a_n = a_1 + 5a_0 - (-5)^n(a_1 - a_0) = 7 + 5^n$$

従って

$$a_n = \frac{7}{6} - \frac{1}{6} \cdot (-5)^n$$

となります。

(7) 差分方程式  $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 0$  の特性方程式

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

を解くと  $\lambda = 3, -2$  となります。これを用いて方程式を

$$\begin{cases} a_{n+2} + 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} + 2a_n) \\ a_{n+2} - 3a_{n+1} = -2(a_{n+1} - 3a_n) \end{cases}$$

と変形します。これから

$$a_{n+1} + 2a_n = 3^n(a_1 + 2a_0) \quad (8)$$

$$a_{n+1} - 3a_n = (-2)^n(a_1 - 3a_0) \quad (9)$$

が導かれますが, (8)-(9) から

$$\begin{aligned} 5a_n &= 3^n(a_1 + 2a_0) - (-2)^n(a_1 - 3a_0) \\ &= 3^n(2 + 2 \cdot 1) - (-2)^n(2 - 3 \cdot 1) = 4 \cdot 3^n + (-2)^n \end{aligned}$$

従って

$$a_n = \frac{4}{5} \cdot 3^n + \frac{1}{5} \cdot (-2)^n$$

となります。

(8) 差分方程式  $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$  の特性方程式

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

を解くと  $\lambda = 2$  (重根) となります。これを用いて方程式を

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$$

と変形すると

$$a_{n+1} - 2a_n = 2^n(a_1 - 2a_0) = -2^n$$

となります。この各辺を  $2^{n+1}$  で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = -\frac{1}{2}$$

となります。これは  $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$  が公差  $-\frac{1}{2}$  の等比数列であることを意味します。従って

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_0}{2^0} + n \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{n}{2}$$

から

$$a_n = 2^n - n \cdot 2^{n-1}$$

であることが分かります。

**III (1)**  $\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$  を計算しましょう。

(2) (1) を用いて

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

を計算しましょう。

解答 (1)

$$\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$$

(2) (1) から示される

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$$

を用いる. ここで  $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$  とおくと

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) \\ &= -\frac{1}{2} (a_{n+1} - a_1) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2} \right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

**IV (1)**  $(k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2)$  を計算しましょう。

**(2)**  $\sum_{k=1}^n k(k-1)$  と  $\sum_{k=1}^n k^2$  を計算しましょう。

**(3)** (2) と同様のテクニックを使って  $\sum_{k=1}^n (k+1)k(k-1)$  と  $\sum_{k=1}^n k^3$  を計算しましょう。

**解答 (1)**

$$(k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2) = k(k-1)\{(k+1) - (k-2)\} = 3k(k-1)$$

**(2) (1) から**

$$k(k-1) = \frac{1}{3}(k+1)k(k-1) - \frac{1}{3}k(k-1)(k-2)$$

が成立します.  $f(k) = \frac{1}{3}k(k-1)(k-2)$  とすると

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k-1) &= \sum_{k=1}^n (f(k+1) - f(k)) \\ &= f(n+1) - f(1) = \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) = \frac{1}{3}(n^3 - n) \end{aligned}$$

となります. さらに

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n k(k-1) + \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{3}(n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

**(3)**

$$\begin{aligned} &(k+2)(k+1)k(k-1) - (k+1)k(k-1)(k-2) \\ &= (k+1)k(k-1)\{(k+2) - (k-2)\} = 4(k+1)k(k-1) \end{aligned}$$

から

$$(k+1)k(k-1) = \frac{1}{4}(k+2)(k+1)k(k-1) - \frac{1}{4}(k+1)k(k-1)(k-2)$$

となります. ここで  $g(k) = \frac{1}{4}(k+1)k(k-1)(k-2)$  と定めると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (k+1)k(k-1) &= \sum_{k=1}^n (g(k+1) - g(k)) \\ &= f(n+1) - f(1) = \frac{1}{4}(n+2)(n+1)n(n-1)\end{aligned}$$

となります. さらに

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^3 &= \sum_{k=1}^n (k+1)k(k-1) + \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{4}(n+2)(n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

と計算されます.

**V** (2017/04/26 第3講 小テスト問題) 差分方程式

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = p \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

を満たす  $\{a_n\}$  を  $a_0, a_1, p$  を用いて表しましょう.

**解答**

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

とすると差分方程式は

$$b_{n+1} - b_n = p \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

となる. 従って  $\{b_n\}$  は公差  $p$  の等差数列であるので

$$b_n = b_0 + np = a_1 - a_0 + np \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

と表される. さらに

$$\begin{aligned}a_n &= a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= a_0 + (a_1 - a_0) + \{a_1 - a_0 + p\} + \{a_1 - a_0 + 2p\} \\ &\quad \{a_1 - a_0 + 3p\} + \dots + \{a_1 - a_0 + (n-1)p\} \\ &= a_0 + n(a_1 - a_0) + p(0 + 1 + 2 + \dots + (n-1)) \\ &= a_0 + n(a_1 - a_0) + \frac{n(n-1)}{2}p\end{aligned}$$

と計算されます.

**VI** (2018/04/25 第3講 小テスト問題) 差分方程式

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 2a_n + \frac{1}{2^n} & (n = 0, 1, 2, \dots) & (1) \\ a_0 &= C & & (2) \end{cases}$$

の解を求めましょう.

解答 (1) の両辺を  $2^{n+1}$  で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を得ます. これから

$$\begin{array}{rcl} \frac{a_n}{2^n} & - & \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \\ \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} & - & \frac{a_{n-2}}{2^{n-2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{n-2}} \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ +) & \frac{a_1}{2} & - \frac{a_0}{1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \\ \hline \frac{a_n}{2^n} & - & a_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-2}} + \dots + \frac{1}{4} + 1 \right) \\ & & = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} \\ & & = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{4^n} \right) \end{array}$$

となります. 従って

$$\frac{a_n}{2^n} = a_0 + \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{4^n} \right)$$

さらに

$$a_n = C \cdot 2^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^n}$$

であることが分かります.

**VII** 実数  $r \in \mathbb{R}$  が  $r \neq -1$  を満たすとき、極限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{r^n + 1}$$

を求めましょう。

解答 (i)  $-1 < r < 1$  のとき  $r^n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow +\infty$ ) が成立しますから

$$\frac{1}{r^n + 1} \rightarrow \frac{1}{0 + 1} = 1$$

(ii)  $r = 1$  のとき

$$\frac{1}{r^n + 1} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$$

(iii)  $r < -1$  または  $r > 1$  のとき、 $|\frac{1}{r}| < 1$  に注意すると  $(\frac{1}{r})^n = \frac{1}{r^n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow +\infty$ ) が分かりますから

$$\frac{1}{r^n + 1} = \frac{\frac{1}{r^n}}{1 + \frac{1}{r^n}} \rightarrow \frac{0}{1 + 0} = 0$$



VIII 実数  $r \in \mathbb{R}$  が  $r > 0$  を満たすとき、極限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nr^n + 1}$$

を求めましょう。

解答 (i)  $0 < r < 1$  のとき  $nr^n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow +\infty$ ) が成立しますから

$$\frac{1}{nr^n + 1} \rightarrow \frac{1}{0 + 1} = 1$$

(ii)  $r = 1$  のとき

$$\frac{1}{nr^n + 1} = \frac{1}{n + 1} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{0}{1 + 0} = 0$$

(iii)  $r > 1$  のとき  $|\frac{1}{r}| < 1$  から  $(\frac{1}{r})^n = \frac{1}{r^n} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow +\infty$ ) が成立しますから

$$\frac{1}{nr^n + 1} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r^n}}{1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r^n}} \rightarrow \frac{0 \cdot 0}{1 + 0 \cdot 0} = 0$$

IX 次の数列の極限を求めましょう。

(1)  $\frac{3n+7}{n^2+n+1}$  (2)  $\frac{5n-2}{7n+3}$  (3)  $\frac{n^2}{1+n^2}$  (4)  $\frac{2^n}{3^n+4}$  (5)  $\frac{4^n-5^n}{3^n+5^n}$  (6)  $\frac{4^{n+1}+2^{n+1}}{4^n-3^n}$  (7)  $\frac{3 \cdot 2^n - 5}{2^{n+3}}$

(1)

$$\frac{3n+7}{n^2+n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(3n+7)}{n^2+n+1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{3+7\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \rightarrow 0 \cdot \frac{3+7 \cdot 0}{1+0+0} = 0$$

(2)

$$\frac{5n-2}{7n+3} = \frac{5-2 \cdot \frac{1}{n}}{7+3 \cdot \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{5-2 \cdot 0}{7+3 \cdot 0} = \frac{5}{7}$$

(3)

$$\frac{n^2}{1+n^2} = \frac{1}{\frac{1}{n^2}+1} \rightarrow \frac{1}{0+1} = 1 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

(4)

$$\frac{2^n}{3^n+4} = \frac{(\frac{2}{3})^n}{1+4 \cdot (\frac{1}{3})^n} \rightarrow \frac{0}{1+4 \cdot 0} = 0$$

(5)

$$\frac{4^n-5^n}{3^n+5^n} = \frac{(\frac{4}{5})^n-1}{(\frac{3}{5})^n+1} \rightarrow \frac{0-1}{0+1} = -1 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

(6)

$$\frac{4^{n+1} + 2^{n+1}}{4^n - 3^n} = \frac{4 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n} \rightarrow \frac{4 + 2 \cdot 0}{1 - 0} = 4 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

(7)

$$\frac{3 \cdot 2^n - 5}{2^n + 3} = \frac{3 - 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n} \rightarrow \frac{3 - 5 \cdot 0}{1 + 3 \cdot 0} = 3 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

**X**  $\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$  の値を求めましょう。

解答

$$S_n = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

とします。

$$\begin{array}{r} S_n = 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4^2} + 4 \cdot \frac{1}{4^3} + \cdots + n \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \\ -) \frac{1}{4} S_n = \quad 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4^2} + 3 \cdot \frac{1}{4^3} + \cdots + (n-1) \cdot \frac{1}{4^{n-1}} + n \cdot \frac{1}{4^n} \\ \hline \frac{3}{4} S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}} - n \cdot \frac{1}{4^n} \end{array}$$

から

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{4}{3} \cdot \frac{n}{4^n} = \frac{16}{9} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) - \frac{4}{3} \cdot n \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &\rightarrow \frac{16}{9}(1-0) - \frac{4}{3} \cdot 0 = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

よって

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{16}{9}$$

**XI**  $|r| < 1$  のとき  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 r^n = 0$  であることを示しましょう。

解答

(i)  $0 < r < 1$  のとき  $s = \frac{1}{r}$  とおくと  $s > 1$  となります。このとき  $s = 1 + \theta$  とすると  $\theta > 0$  であることに注意しましょう。このとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^n} &= s^n = (1 + \theta)^n \\ &= 1 + {}_n C_1 \theta + {}_n C_2 \theta^2 + {}_n C_3 \theta^3 + {}_n C_4 \theta^4 + \cdots + \theta^n \end{aligned}$$

の最左辺において各項が正ですから

$$\frac{1}{r^n} > {}_n C_3 \theta^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \theta^3$$

であることが従います. よって

$$0 < r^n < \frac{1}{\theta^3} \cdot \frac{3!}{n(n-1)(n-2)} \quad \text{から} \quad 0 < n^2 r^n < \frac{1}{\theta^3} \cdot \frac{3!}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})} \cdot \frac{1}{n}$$

であることが分かります. ここで

$$\frac{1}{\theta^3} \cdot \frac{3!}{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

ですから

$$n^2 r^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

であることが分かります.

(ii)  $r = 0$  のとき  $n^2 r^n = 0 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$

(iii)  $-1 < r < 0$  のとき  $\rho = -r$  とすると  $0 < \rho < 1$  となります. このとき

$$-\rho^n \leq r^n \leq \rho^n \quad \text{から} \quad -n^2 \rho^n \leq n^2 r^n \leq n^2 \rho^n$$

が成立します. ここで

$$-n^2 \rho^n \rightarrow 0, \quad n^2 \rho^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

が成立しますから, はさみうちの定理から

$$n^2 r^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

であることが導かれます.