

掃き出し法入門

3次元列ベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \\ 18 \end{pmatrix}$$

とします. \vec{a}, \vec{b} が生成する部分空間を

$$L(\vec{a}, \vec{b}) := \{x\vec{a} + y\vec{b} \in \mathbf{R}^3; x, y \in \mathbf{R}\}$$

と定めます. このとき $\vec{q}, \vec{r} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ が成立するか考えます.

\vec{q} に関して

$$\begin{aligned} x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{q} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 9 & \cdots (i) \\ 2x + 2y = 10 & \cdots (ii) \\ -x + y = -1 & \cdots (iii) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 9 & \cdots (i)' = (i) \\ -4y = -8 & \cdots (ii)' := (ii) + (-2) \times (i) \\ 4y = 8 & \cdots (iii)' := (iii) + 1 \times (i) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 9 & \cdots (i)'' = (i)' \\ y = 2 & \cdots (ii)'' := (ii)' \times (-\frac{1}{4}) \\ 4y = 8 & \cdots (iii)'' := (iii)' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 & \cdots (i)_3 = (i)'' + (-3) \times (ii)'' \\ y = 2 & \cdots (ii)_3 := (ii)'' \\ 0x + 0y = 0 & \cdots (iii)_3 := (iii)'' + 1 \times (ii)'' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 3, y = 2 \end{aligned}$$

となるので, $\vec{q} \in L(\vec{a}, \vec{b})$ であることが従います. 以上の計算は拡大行列を用いると

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 9 & & & \\ 2 & 2 & 10 & & & \\ -1 & 1 & -1 & & & \end{array} \right) \xrightarrow{(I)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 9 & & & \\ 0 & -4 & -8 & & & \\ 0 & 4 & 8 & & & \end{array} \right) \xrightarrow{(II)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 9 & & & \\ 0 & 1 & 2 & & & \\ 0 & 4 & 8 & & & \end{array} \right) \xrightarrow{(III)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & & & \\ 0 & 1 & 2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right)$$

と表されます. ここで各ステップで以下の行基本変形を用いました.

$$(I) \ 2r+ = 1r \times (-2), 3r+ = 1r \times 1, \quad (II) \ 2r \times (-\frac{1}{4}), \quad (III) \ 1r+ = 2r \times (-3), 3r+ = 2r \times (-4)$$

\vec{r} に関して

$$\begin{aligned} x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{r} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = -5 & \cdots (i) \\ 2x + 2y = -11 & \cdots (ii) \\ -x + y = 18 & \cdots (iii) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = -5 & \cdots (i)' = (i) \\ -4y = -1 & \cdots (ii)' := (ii) + (-2) \times (i) \\ 4y = 13 & \cdots (iii)' := (iii) + 1 \times (i) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = -5 & \cdots (i)'' = (i)' \\ y = \frac{1}{4} & \cdots (ii)'' := (ii)' \times (-\frac{1}{4}) \\ 4y = 13 & \cdots (iii)'' := (iii)' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{4} & \cdots (i)_3 = (i)'' + (-3) \times (ii)'' \\ y = \frac{1}{4} & \cdots (ii)_3 := (ii)'' \\ 0x + 0y = 12 & \cdots (iii)_3 := (iii)'' + 1 \times (ii)'' \end{cases} \end{aligned}$$

となるので, $(iii)_3$ を満たす $x, y \in \mathbf{R}$ が存在しないので $\vec{r} \notin L(\vec{a}, \vec{b})$ であることが従います. 以上の計算は拡大行列を用いると

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 9 & & & \\ 2 & 2 & 10 & & & \\ -1 & 1 & -1 & & & \end{array} \right) \xrightarrow{(I)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -5 & & & \\ 0 & -4 & -1 & & & \\ 0 & 4 & 13 & & & \end{array} \right) \xrightarrow{(II)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -5 & & & \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & & & \\ 0 & 4 & 13 & & & \end{array} \right) \xrightarrow{(III)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{23}{4} & & & \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & & & \\ 0 & 0 & 12 & & & \end{array} \right)$$

と表されます。ここで各ステップで \vec{q} の場合と同一の変形を用いています。このことから同時に計算をしてしまえばよいことが分かります。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -5 \\ 2 & 2 & 10 & -11 \\ -1 & 1 & -1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{(I)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -5 \\ 0 & -4 & -8 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{(II)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 4 & 8 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{(III)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -\frac{23}{4} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$