1-1　行列の積.

1° $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ に対して

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} = \begin{pmatrix} \vdots \\ xa_i + yb_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ (a_i\ b_i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots \\ xa_i + yb_i + zc_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ (a_i\ b_i\ c_i)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

2° $$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \left((\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\ \ (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \left((\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\ \ (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\ \ (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vdots$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} = \left((\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\ \ (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

$$= \left((\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\ \ (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\ \ (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \cdots$$

$$\vdots$$

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ が生成する部分空間

$$L(\vec{a}, \vec{b}) = \{ x\vec{a} + y\vec{b} \in \mathbb{R}^n \,;\, x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in L(\vec{a}, \vec{b}) \Longrightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in L(\vec{a}, \vec{b})$$

$\vec{v}_1 = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とする.

$$\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = (\vec{v}_1\ \vec{v}_2)\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \left((\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\ (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$= \left((\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right)\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{結合則}}{\underset{\uparrow}{=}} (\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \end{pmatrix} \in L(\vec{a}, \vec{b})$$

問　$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \{ x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \in \mathbb{R}^n \,;\, x, y, z \in \mathbb{R} \}$$

に対して

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \Rightarrow \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 \in L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

を示せ. 対応する結合則を証明できたら示してみる.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \vec{0}$$

実際、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{線型性}}}{=} \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \cdot \vec{0} + \mu\vec{0} = \vec{0}$$

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$\ker(\vec{a}\ \vec{b}) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ;\ (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right\}$$

とする　これを行列 $(\vec{a}\ \vec{b})$ の核と呼ぶ。上と同様に

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \ker(\vec{a}\ \vec{b}) \Longrightarrow \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \ker(\vec{a}\ \vec{b})$$

が成立する。

(問) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ に対し

$$\ker(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ;\ (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \right\}$$

とする。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \ker(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

$$\Longrightarrow \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \ker(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

を示せ。対応する線型性も示せ。