ガイダンス
emath2024 Lec01

Nobuyuki TOSE

April 08, 2024

最初にお知らせ

教科書・参考書 ・教科書は必要ないと思います．資料が十分にあります．演習問題もたくさんありますから，参考書・問題集も不要だと思い ます．

資料・伝達・ビデオ ・演習問題などの資料は K-LMS または URL http://web.econ.keio.ac.jp/staff/tose/cours/2024/emath/ からリンクをします．

・機密性の高い情報は K-LMS またはメッセージ で伝達します．

・質問・質問は随時，K-LMS のメッセージを使って送ってください．数式を書く必要がある場合は，手書きの文書を PDF にしてメッセージで送ってください．

・私への連絡は K-LMS のメッセージでお願いします。（メールだと埋もれる可能性が大きいのです。）

小テスト ・毎回最後の 20 分程度で小テスト実施します。提出は解答用紙を提出してもらいます。これに加えて解答用紙の写真を PDF にして K-LMS に提出してもらいます。

学習の進め方

ノート ・資料があるからノートなんていらないと思うかもしれませんが，資料が大量になりますから，まとめのノートは作ったらいいと思います．

演習問題 演習問題は講義内容に密接に作ってあります．

講義の目的

- 2 年生，3 年生で学ぶミクロ経済学，計量経済学をより深く理解するための数学を学びます．

前期の内容

前期 ミクロ経済学のための数学

- **I** 生産理論 (Production Theory)
- **II** 消費者理論 (Consumer Theory)

生産理論

2 種類の生産要素 (production elements)I, II を原料として 1 種類の生産物 A を生産する．

	生産要素		$\longrightarrow$		生産物
	I	II			A
投入量	x	y		生産量	$z = f(x, y)$
価格	p	q		価格	r

ここで $f(x, y)$ を生産関数 (production function) と呼ぶ．この状況で利潤 (profit) は

$$\pi(x, y) = rf(x, y) - px - qy$$

となる．利潤を最大にすることを考える．

生産関数の例

例 コブ・ダグラス型生産関数 (Charles Cobb, Paul Douglas)
$A, \alpha, \beta > 0$ とする．

$$f(x, y) := Ax^{\alpha}y^{\beta} \quad (x, y > 0)$$

両辺の対数を考えると

$$\log f(x, y) = \alpha \log x + \beta \log y + \log A$$

となるので，これを用いて重回帰分析によって α, β, A を推定する．

別の例，CES(Constant Elasticity Substitution) 型生産関数については講義で紹介する．

利潤関数の最大化 (1)

第 1 象限 (1st quadrant)

$$\mathbf{R}^2_{++} := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2;\ x, y > 0\}$$

上で考える. $\mathrm{P}_0(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2_{++}$ とする.

$$\begin{aligned} \pi\text{は}\mathrm{P}_0\text{で最大} \Rightarrow &\quad \pi\text{は}\mathrm{P}_0\text{で極大} \\ \Rightarrow &\quad \pi_x(\mathrm{P}_0) = \pi_y(\mathrm{P}_0) = 0 \\ &\left\{ \begin{array}{ccccc} r f_x(x_0, y_0) & - & p & = & 0 \quad (1) \\ r f_y(x_0, y_0) & - & q & = & 0 \quad (2) \end{array} \right. \end{aligned}$$

となる.

利潤関数の最大化 (2)

U が R^2 の開集合とする．$f:\ U \to \mathrm{R}$ に対して

$$
\begin{aligned}
& (a,b) \in U \text{ で } f \text{ が極大（小）値をとる} \\
\Rightarrow & \\
& f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0
\end{aligned}
$$

利潤関数の最大化 (2)

陰関数定理を適用する条件の下で x, y の方程式と考えて，

$$\begin{cases} rf_x(x,y) & - & p & = & 0 & \dots(1) \\ rf_y(x,y) & - & q & = & 0 & \dots(2) \end{cases}$$

を x, y に関して解くと生産要素需要関数 (production element demand functions)

$$x = x(p,q,r),\ y = y(p,q,r)$$

を得る．

問題

- 停留点，すなわち $\pi_x(x_0, y_0) = \pi_y(x_0, y_0) = 0$ を満たす (x_0, y_0) がどのような条件で $\mathbf{R}^2_{++}$ で極大，最大になるか？
- 陰関数の定理を使って解くということはどういうことか？
- 生産要素需要関数 $x(p, q, r)$, $y(p, q, r)$ の p, q, r に関する挙動は？

予算 I をすべて支出して 2 つの財 (goods)1 財と 2 財をそれぞれ x 単位，y 単位購入することを考えます．また効用関数 (utility function) が定義されているとします．

	1 財	2 財
購入量	x	y
価格	p	q

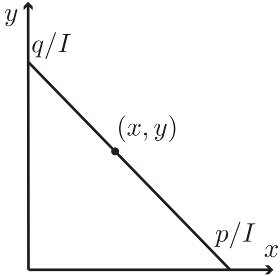
$$u : \mathbf{R}^2_{++} \longrightarrow \mathbf{R}$$

問題

制約条件 (constraint condition)

$$I - px - qy = 0$$

の下で $u(x, y)$ を最大化する．



$\mathrm{P}_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_{++}$ において制約条件付き極値問題が最大値をとるとすると

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) & + & \lambda(-p) & = & 0 \cdots (1) \\ u_y(x_0, y_0) & + & \lambda(-q) & = & 0 \cdots (2) \\ I - px_0 - qy_0 & & & = & 0 \cdots (3) \end{cases}$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する（Lagrange の未定乗数法）.
さらに陰関数定理が適用できる条件の下で x, y, λ に関して

$$\begin{cases} u_x(x, y) & + & \lambda(-p) & = & 0 \cdots (1) \\ u_y(x, y) & + & \lambda(-q) & = & 0 \cdots (2) \\ I - px - qy & & & = & 0 \cdots (3) \end{cases}$$

を解くと 1 財と 2 財の需要関数 (demand functions) および所得の限界効用

$$x = x(p, q, I), \ y = y(p, q, I), \ \lambda = \lambda(p, q, I)$$

問題

- 停留点，すなわち (1),(2),(3) を満たす (x_0, y_0) がどのような条件で制約条件問題の極大点，最大点になるか？
  - 解答の背景には効用関数の凹性，さらには 2 変数の 2 次形式の正（負）定値性
- 陰関数の定理を使って解くということはどういうことか？
- 間接効用関数を $v(p,q,I) = u(x(p,q,I), y(p,q,I))$ と定義すると

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda(p,q,I)$$

となる．これがあるので $\lambda(p,q,I)$ を所得の限界効用と呼びます．

- 需要関数 $x(p,q,I)$, $y(p,q,I)$ と所得の限界効用 $\lambda(p,q,I)$ の p, q, I に関する挙動は？

後期

- 2 制約条件 3（または 4）変数の Lagrange の未定乗数法
  - 応用としてパレート最適化やポートフォリオ理論
- 計量経済学の準備（線型代数）
  - 固有値問題，最小二乗法など
- ポートフォリオ理論（分散投資）