第 1 講義 04 月 08 日　演習問題解答

I 以下の函数の停留点を求めましょう．

(1)　$z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 8y$　(2)　$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$

(3)　$z = x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y$　(4)　$z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$

(5)　$z = x^3 - xy - y^2$

(1)

$$\begin{cases} z_x &= 2x + y - 4 &= 0 \\ z_y &= x + 2y - 8 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式を使って解くと

$$x = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{0}{3} = 0, \quad y = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{12}{3} = 4$$

となりますから，$(x, y) = (0, 4)$ が z の停留点であることが分かります．

(2)

$$\begin{cases} z_x &= 3x^2 - 9y &= 0 \cdots (I) \\ z_y &= 3y^2 - 9x &= 0 \cdots (II) \end{cases}$$

を解きます．(I) から $y = \frac{1}{3}x^2$ となるので (II) から得られる $y^2 = 3x$ に代入して

$$\frac{1}{9}x^4 = 3x \quad \text{すなわち} \quad x^4 = 27x$$

を得ます．従って

$$x = 0 \quad \text{または} \quad x = 3$$

が必要です．

(a) <u>$x = 0$ のとき</u>, (I) から $y = 0$ となりますが、逆に $(x, y) = (0, 0)$ は (I) かつ (II) を満たします．

(b) <u>$x = 3$ のとき</u>, (I) から $y = 3$ となりますが、逆に $(x, y) = (3, 3)$ は (I) かつ (II) を満たします．

以上で z の停留点は $(x, y) = (0, 0), (3, 3)$ であることが分かりました．

(3)

$$\begin{cases} z_x &= 2x + y - 4 &= 0 \\ z_y &= x - 2y - 2 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad y = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{0}{-5} = 0$$

となりますから，$(x, y) = (2, 0)$ が z の停留点であることが分かります．

(4)

$$\begin{cases} z_x &= 2x + 4y - 6 &= 0 \\ z_y &= 4x + 4y - 8 &= 0 \end{cases}$$

をクラメールの公式で解くと

$$x = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{-8}{-8} = 1, \quad y = \frac{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{-8}{-8} = 1$$

から停留点は $(x, y) = (1, 1)$ となります．

(5)

$$\begin{cases} z_x &= 3x^2 - y &= 0 & (i) \\ z_y &= -x - 2y &= 0 & (ii) \end{cases}$$

を解きます。(ii) から $x = -2y$ となりますが，これを (i) に代入して

$$12y^2 - y = 0$$

を得ますが，これから $y = 0$ または $y = \frac{1}{12}$ であることが分かります．これを $x = -2y$ に代入して

$$\begin{array}{ll} y = 0 & \text{のとき} \quad x = 0 \\ y = \frac{1}{12} & \text{のとき} \quad x = -\frac{1}{6} \end{array}$$

となりますから，停留点は

$$(x, y) = (0, 0), \quad (-\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$$

であることが分かります．

II 次の行列の積を計算しましょう．

(1) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(4)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(5)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(7)** $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(8)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(10)** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(11)** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

解答

(1)

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda x + y \end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \end{pmatrix}$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda + \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(8)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(9)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda a_1 + b_1 \\ a_2 & \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$i.e. \quad (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \lambda\vec{a} + \vec{b})$$

(10)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$i.e. \quad (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda\vec{a}\ \vec{b})$$

(11)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

$$i.e. \quad (\vec{a}\ \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{b}\ \vec{a})$$

III $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{R}^n$ とします．以下を計算しましょう。

(1) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, **(2)** $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, **(3)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, **(4)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, **(5)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

(6) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, **(7)** $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, **(8)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, **(9)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$,

(10) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, **(11)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, **(12)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$,

解答

(1)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}=\vec{a}$$

(2)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}=\vec{b}$$

(3)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}=\vec{a}$$

(4)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}+0\cdot\vec{c}=\vec{b}$$

(5)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=0\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}+1\cdot\vec{c}=\vec{c}$$

(6)

$$(\vec{a}\,\vec{b})\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b} & 0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\end{pmatrix}$$

(7)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{b} & 1\cdot\vec{a}+0\cdot\vec{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{b}\ \vec{a}\end{pmatrix}$$

(8)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

(9)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=(\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a})$$

(10)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(\lambda\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

(11)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \lambda\vec{b}\ \vec{c})$$

(12)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b}\ \lambda\vec{c})$$