

数理科学基礎 2024 年度 V001,20240323

戸瀬信之

# 第1章 形式論理，集合，写像

## 1.1 命題

命題とは真 (True) か偽 (False) がはっきりしている文のことです。

$$1 < 2$$

は真であり

$$1 > 2$$

は偽です。

$P_1$  と  $P_2$  が命題であるとし、 $P_1$  かつ  $P_2$  ( $P_1 \wedge P_2$ ) が真であるのは  $P_1$  と  $P_2$  の両方が真のときです。このことを真理表 (真偽表) (truth table) と呼ぶ次の表で表します。

| $P_1$ | $P_2$ | $P_1 \wedge P_2$ |
|-------|-------|------------------|
| T     | T     | T                |
| T     | F     | F                |
| F     | T     | F                |
| F     | F     | F                |

$P_1$  または  $P_2$  ( $P_1 \vee P_2$ ) が真であるのは  $P_1$  と  $P_2$  のどちらか少なくとも一方が真のときです。真理表では次のようになります。

| $P_1$ | $P_2$ | $P_1 \vee P_2$ |
|-------|-------|----------------|
| T     | T     | T              |
| T     | F     | T              |
| F     | T     | T              |
| F     | F     | F              |

$P_1$  の否定  $\neg(P_1)$  が真となるのは  $P_1$  が偽であるときです。真理表では次のようになります。

| $P_1$ | $\neg(P_1)$ |
|-------|-------------|
| T     | F           |
| F     | T           |

となります。

$P_1$  ならば  $P_2$  ( $P_1 \Rightarrow P_2$ ) が偽であるのは  $P_1$  が真であってかつ  $P_2$  が偽であるときで、その他の場合は真となります。真理表では

| $P_1$ | $P_2$ | $P_1 \implies P_2$ |
|-------|-------|--------------------|
| T     | T     | T                  |
| T     | F     | F                  |
| F     | T     | T                  |
| F     | F     | T                  |

となります.

$P_1$  と  $P_2$  が同値であるという命題  $P_1 \Leftrightarrow P_2$  は  $P_1$  と  $P_2$  の真偽が一致するとき真になります. 真理表では

| $P_1$ | $P_2$ | $P_1 \Leftrightarrow P_2$ |
|-------|-------|---------------------------|
| T     | T     | T                         |
| T     | F     | F                         |
| F     | T     | F                         |
| F     | F     | T                         |

となります.

## 1.2 論理式, 同値式, トートロジー

命題  $P_1, P_2, \dots$  を  $\wedge, \vee, \neg(\cdot), \implies, \Leftrightarrow$  を用いて組み合わせてできる命題を**論理式**と呼びます<sup>1</sup>. 例えば

$$L_1(P_1, P_2) := (P_1 \implies P_2)$$

$$L_2(P_1, P_2) := (\neg(P_2) \implies \neg(P_1))$$

$$L_3(P_1, P_2) := (\neg(P_1) \vee P_2)$$

と定めましょう.  $L_2$  と  $L_3$  の  $P_1, P_2$  の真偽の取り方による真偽の値を計算します. まず  $L_2$  について考えると

| $P_1$ | $P_2$ | $\neg(P_1)$ | $\neg(P_2)$ | $\neg(P_2) \implies \neg(P_1)$ |
|-------|-------|-------------|-------------|--------------------------------|
| T     | T     | F           | F           | T                              |
| T     | F     | F           | T           | F                              |
| F     | T     | T           | F           | T                              |
| F     | F     | T           | T           | T                              |

となります. 次に  $L_3$  の値は

<sup>1</sup> $\wedge, \vee, \neg(\cdot)$ , を使うだけでよいことが以下で示されます.

| $P_1$ | $P_2$ | $\neg(P_1)$ | $\neg(P_1) \vee P_2$ |
|-------|-------|-------------|----------------------|
| T     | T     | F           | T                    |
| T     | F     | F           | F                    |
| F     | T     | T           | T                    |
| F     | F     | T           | T                    |

となります. 以上で  $L_1(P_1, P_2)$ ,  $L_2(P_1, P_2)$ ,  $L_3(P_1, P_2)$  は常に同一の真偽値をとることが分かりました. これをもって

$$L_1(P_1, P_2) \equiv L_2(P_1, P_2) \equiv L_3(P_1, P_2)$$

と記します.  $L_1, L_2, L_3$  は**同値式**であるといいます. また,  $P_1 \Rightarrow P_2$  に対して  $\neg(P_2) \Rightarrow \neg(P_1)$  をその**対偶** (contraposition) と呼びます.

**演習 1.1.** 以下の同値式を示しましょう.

$$(P_1 \Leftrightarrow P_2) \equiv ((P_1 \Rightarrow P_2) \wedge (P_2 \Rightarrow P_1)) \quad (1.1)$$

$$\text{(ド・モルガンの法則)} \quad \neg(P_1 \wedge P_2) \equiv (\neg(P_1) \vee \neg(P_2)) \quad (1.2)$$

$$\text{(ド・モルガンの法則)} \quad \neg(P_1 \vee P_2) \equiv (\neg(P_1) \wedge \neg(P_2)) \quad (1.3)$$

**注意** 以下の同値式はより基本的です.

$$\text{(交換則)} \quad P \wedge Q \equiv Q \wedge P, \quad P \vee Q \equiv Q \vee P \quad (1.4)$$

$$\text{(結合則)} \quad (P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R), \quad (P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R) \quad (1.5)$$

$$\text{(分配則)} \quad (P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \quad (1.6)$$

$$\text{(分配則)} \quad (P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \quad (1.7)$$

結合則 (1.5) があるので, (1.5) にある命題をそれぞれ

$$P \wedge Q \wedge R, \quad P \vee Q \vee R$$

と表記しても紛れることがないことに注意しましょう.

**演習 1.2.** (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) を証明しましょう.

**注意** 以下の同値式も基本的です.

$$\text{(2重否定の法則)} \quad \neg(\neg(P)) \equiv P \quad (1.8)$$

**演習 1.3.** (1.8) を示しましょう.

次に論理式

$$(P \wedge Q) \Rightarrow P \quad (1.9)$$

を考えます. 真理表

| P | Q | $P \wedge Q$ | $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ |
|---|---|--------------|------------------------------|
| T | T | T            | T                            |
| T | F | F            | T                            |
| F | T | F            | T                            |
| F | F | F            | T                            |

から分かるように  $P, Q$  の真偽値によらず真となります. このような論理式を**トートロジー** (tautology) あるいは**恒真式**と呼びます. このトートロジー  $(P \wedge Q) \Rightarrow P$  ですが, 同値式として

$$\begin{aligned} (P \wedge Q) \Rightarrow P &\equiv \neg(P \wedge Q) \vee P \\ &\equiv (\neg(P) \vee \neg(Q)) \vee P \\ &\equiv (P \vee \neg(P)) \vee \neg(Q) \end{aligned}$$

と変形できます. より一般に

$$(P \vee \neg(P)) \vee Q \quad (1.10)$$

はトートロジーになりますから

$$(P \vee \neg(P)) \vee \neg(Q) \text{ 従って } (P \wedge Q) \Rightarrow P$$

がトートロジーであることが示されます. (1.10) がトートロジーであるのは真理表

| P | Q | $\neg(P)$ | $P \vee \neg(P)$ | $(P \vee \neg(P)) \vee Q$ |
|---|---|-----------|------------------|---------------------------|
| T | T | F         | T                | T                         |
| T | F | F         | T                | T                         |
| F | T | T         | T                | T                         |
| F | F | T         | T                | T                         |

から分かります. この真理表から

$$\text{(排中律)} \quad P \vee \neg(P) \quad (1.11)$$

がトートロジーであることが分かります.

**演習 1.4.** 論理式

$$P \Rightarrow (P \vee Q) \quad (1.12)$$

がトートロジーであることを示しましょう.

上で掲げた排中律 (1.11) を含めて, 基本的なトートロジーを列挙しておきましょう.

$$\text{(同一律)} \quad P \Rightarrow P \quad (1.13)$$

$$\text{(排中律)} \quad P \vee \neg(P) \quad (1.14)$$

$$\text{(矛盾律)} \quad \neg(P \wedge \neg(P)) \quad (1.15)$$

**演習 1.5.** (1.13),(1.15) がトートロジーであることを示しましょう.

最後に論理式

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P \quad (1.16)$$

がトートロジーであることを示しましょう (このことを**パースの法則**と呼びます).

$$\begin{aligned} ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P &\equiv \neg((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \vee P \\ &\equiv \neg(\neg(\neg(P) \vee Q) \vee P) \vee (P) \\ &\equiv ((\neg(P) \vee Q) \wedge \neg(P)) \vee P \\ &\equiv (\neg(P) \vee Q \vee P) \wedge (\neg(P) \vee P) \\ &\equiv ((\neg(P) \vee P) \vee Q) \wedge (\neg(P) \vee P) \end{aligned}$$

において  $(\neg(P) \vee P) \vee Q$  と  $(\neg(P) \vee P)$  がトートロジーなので, 最右辺がトートロジーであることが分かります. よって (1.16) がトートロジーであることが従います.

**演習 1.6.**

$$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \quad (1.17)$$

がトートロジーであることを示しましょう.

## 1.3 命題関数

$X$  を集合とします.  $x \in X$  に依存する命題を**命題関数**と呼びます. 例えば  $X = \mathbb{R}$  のとき

$$P(x) := (x > 1)$$

$$Q(x) := (x \leq 1)$$

は  $\mathbb{R}$  上で定義される命題関数です. 一般に  $P(x)$  を  $X$  上の命題関数とすると, すべての  $x \in X$  に対して  $P(x)$  が真であるという命題を

$$\forall x \in X \quad [P(x)]$$

と記します. 他方, ある  $x \in X$  に対して  $P(x)$  が成立するという命題を

$$\exists x \in X \quad [P(x)]$$

と記します<sup>2</sup>.

以下の公式

$$\neg(\forall x \in X [P(x)]) \equiv (\exists x \in X \neg(P(x))) \quad (1.18)$$

$$\neg(\exists x \in X [P(x)]) \equiv (\forall x \in X \neg(P(x))) \quad (1.19)$$

は重要です.

## 1.4 集合

### 1.4.1 包含関係

以下では集合  $X$  の部分集合  $A, B, C \subset X$  を考えます.

1.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

2.

$$\neg(A \subset B) \Leftrightarrow \exists x \in A (x \notin B)$$

注意

$$A \subset B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A (x \in B)$$

さらにこの条件は

$$\forall x \in X (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

と同値であることにも注意しましょう.

3.

$$(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C \quad (1.20)$$

(1.20) は命題  $P, Q, R$  に対して, 論理式

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \quad (1.21)$$

がトートロジーであることから導かれます. 実際,  $x \in X$  に対して

$$((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)) \Rightarrow (x \in A \Rightarrow x \in C)$$

が常に成立することから (1.20) が成立することが分かります.

<sup>2</sup> $\forall$  は all, any の A,  $\exists$  は exist の E が由来である.

演習 1.7. (1.21) を真理表を用いて証明しましょう.

4.

$$(A \subset B \wedge A \subset C) \Leftrightarrow A \subset B \cap C \quad (1.22)$$

(1.22) を証明する前に

$$B \cap C \subset B, \quad B \cap C \subset C$$

が常に成立することに注意しましょう. 例えば  $B \cap C \subset B$  ですが,  $x \in X$  に対して

$$(x \in B \wedge x \in C) \Rightarrow x \in B$$

がトートロジーであることから従います ((1.9) 参照).

以上の注意をもとに (1.22) を証明しましょう.

( $\Leftarrow$ )  $A \subset B \cap C, B \cap C \subset B$  から  $A \subset B$  が従います. 同様に  $A \subset B \cap C, B \cap C \subset C$  から  $A \subset C$  が従います.

( $\Rightarrow$ )  $\forall x \in A$  をとると,  $x \in B$  かつ  $x \in C$  が成立しているが, このとき  $x \in B \cap C$  が従う. 以上で  $A \subset B \cap C$  が導かれました.

実は (1.22) は, 命題  $P, Q, R$  に対して同値式

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) \equiv P \Rightarrow (Q \wedge R) \quad (1.23)$$

が成立することから直接導くことができます. 実際  $x \in X$  に対して

$$((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in A \Rightarrow x \in C)) \equiv (x \in A \Rightarrow (x \in B \wedge x \in C))$$

が (1.22) に他なりません. また (1.23) は

$$\begin{aligned} (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) &\equiv (\neg(P) \vee Q) \wedge (\neg(P) \vee R) \\ &\equiv \neg(P) \vee (Q \wedge R) \\ &\equiv P \Rightarrow (Q \wedge R) \end{aligned}$$

と証明できます.

5.

$$(A \subset C \wedge B \subset C) \Leftrightarrow A \cup B \subset C \quad (1.24)$$

(1.24) を証明する前に

$$A \subset A \cup B, \quad B \subset A \cup B$$



が常に成立することに注意しましょう. 例えば  $A \subset A \cup B$  ですが,  $x \in X$  に対して

$$x \in A \Rightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

がトートロジーであることから従います ((1.12) 参照).

次に (1.24) を証明しましょう.

( $\Leftarrow$ )  $A \subset A \cup B$ ,  $A \cup B \subset C$  から  $A \subset C$  が従います. 同様に  $B \subset A \cup B$ ,  $A \cup B \subset C$  から  $B \subset C$  が従います.

( $\Rightarrow$ )

$$\forall x \in A \quad \text{に対して} \quad x \in C$$

$$\forall x \in B \quad \text{に対して} \quad x \in C$$

が成立するとします. このとき  $x \in A \cup B$  が成立しているとします. すると

$$x \in A \quad \vee \quad x \in B$$

が従います.  $x \in A$  ならば  $x \in C$ ,  $x \in B$  ならば  $x \in C$  となりますから,  $x \in C$  であることが分かります. これは

$$A \cup B \subset C$$

が成立することを意味します.

実は (1.24) は, 命題  $P, Q, R$  に対して同値式

$$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \equiv (P \vee Q) \Rightarrow R \quad (1.25)$$

が成立することから直接導くことができます. 実際  $x \in X$  に対して

$$((x \in A \Rightarrow x \in C) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in C)) \equiv (x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in C$$

が (1.24) に他なりません. また (1.25) は

$$\begin{aligned} (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) &\equiv (\neg(P) \vee R) \wedge (\neg(Q) \vee R) \\ &\equiv (\neg(P) \wedge \neg(Q)) \vee R \\ &\equiv \neg(P \vee Q) \vee R \\ &\equiv (P \vee Q) \Rightarrow R \end{aligned}$$

と証明できます.

#### 6. (分配法則)

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (1.26)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (1.27)$$

(1.26) を示します.

$$\begin{aligned}
 x \in (A \cap B) \cup C &\Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in C \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
 &\Leftrightarrow x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C \\
 &\Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)
 \end{aligned}$$

**演習 1.8.** (1.27) を証明しましょう.

**注意** 上で (1.26) を示すために (1.6) すなわち

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \quad (1.28)$$

を用いました. また (1.27) を示すには (1.7) すなわち

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \quad (1.29)$$

を用います.

**注意** 以下の基本的な等式があります.

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A \quad (1.30)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (1.31)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (1.32)$$

### 1.4.2 差集合・補集合

$A, B, C \subset X$  とします. このとき  $X$  の部分集合

$$A \setminus B := \{x \in X; x \in A \wedge x \notin B\}$$

を定義します.

#### 1. (ド・モルガン則)

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \quad (1.33)$$

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \quad (1.34)$$

(1.33) を示します.

$$\begin{aligned}
 x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad x \notin (B \cup C) \\
 &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad \neg(x \in B \quad \vee \quad x \in C) \\
 &\Leftrightarrow x \in A \quad \wedge \quad (x \notin B \quad \wedge \quad x \notin C) \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \quad \wedge \quad x \notin B) \quad \wedge \quad (x \in A \quad \wedge \quad x \notin C) \\
 &\Leftrightarrow x \in A \setminus B \quad \wedge \quad x \in A \setminus C \\
 &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)
 \end{aligned}$$

**演習 1.9.** (1.34) を示しましょう.

さらに

$$A^c := X \setminus A$$

と定義して  $A$  の補集合と呼びます. 上の (1.33), (1.34) から次の (1.35), (1.36) が従います.

**2. (ド・モルガン則)**

$$(B \cup C)^c = B^c \cap C^c \quad (1.35)$$

$$(B \cap C)^c = B^c \cup C^c \quad (1.36)$$

### 1.4.3 直積集合

$X$  と  $Y, Z$  を集合とします. このとき

$$X \times Y := \{(x, y); x \in X, y \in Y\}$$

$$X \times Y \times Z := \{(x, y, z); x \in X, y \in Y, z \in Z\}$$

を直積集合と呼びます. 例えば 2次元列ベクトル全体の集合

$$\mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\}$$

に対して

$$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 := \{(\vec{x}, \vec{y}); \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^2\}$$

と 2本の 2次元列ベクトルの順列全体の集合が定まります. このとき

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \neq \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

に注意しましょう.

3次元列ベクトル全体の集合

$$\mathbf{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}$$

に対して

$$\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^3 := \{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}); \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^3\}$$

と3本の3次元列ベクトルの順列全体の集合が定まります.

## 1.5 写像

$X, Y$  集合として写像

$$f: X \rightarrow Y$$

が与えられているとします. このとき  $X$  を**定義域**,  $Y$  を**値域**と呼びます.

**注意**  $f: X \rightarrow X$  を  $X$  上の**変換**と呼びます.

1. (像, グラフ)  $A \subset X$  に対して  $Y$  の部分集合

$$f(A) := \{f(a) \in Y; a \in A\}$$

を  $A$  の  $f$  による**像**と呼びます.

$$G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y; x \in X\}$$

を  $f$  の**グラフ**と呼びます.

2. (合成)  $Z$  を集合として写像

$$g: Y \rightarrow Z$$

を考えます. このとき

$$g \circ f: X \rightarrow Z \quad x \mapsto g(f(x))$$

を  $f$  と  $g$  の**合成**と呼びます.

## 3. (写像の合成に関する結合則)

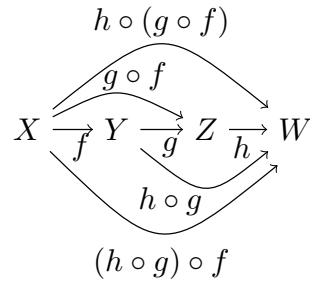
さらに集合  $W$  と写像

$$h: Z \rightarrow W$$

があるとき

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad (1.37)$$

が成立します.



演習 1.10. (1.37) を示しましょう.

4. (逆写像) 写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して

$$g \circ f = id_X, \quad f \circ g = id_Y \quad (1.38)$$

を満たす  $g$  を  $f$  の**逆写像**と呼びます.

逆写像は存在すれば一意的に定まります. すなわち 2 つの写像

$$g_1: Y \rightarrow X, \quad g_2: Y \rightarrow X$$

が

$$g_1 \circ f = id_X, \quad f \circ g_1 = id_Y, \quad g_2 \circ f = id_X, \quad f \circ g_2 = id_Y$$

を満たすならば  $g_1 = g_2$  が成立します. 実際

$$g_2 = id_X \circ g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ id_Y = g_1$$

からこのことは証明できます. この一意性から  $f$  の逆写像を

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$

と記します.

5. (全射) 写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して

$$f(X) = Y$$

が成立するとき, すなわち

$$\forall y \in Y \text{ に対して } \exists x \in X \text{ が存在して } f(x) = y$$

が成立するとき,  $f$  は**全射**であるといいます.

**定理 1.1.** ある写像  $g: Y \rightarrow X$  が

$$f \circ g = id_Y$$

を満たせば,  $f$  は全射となります.

**証明** 任意の  $y \in Y$  に対して

$$y = f(g(y))$$

が成立しますから,  $f$  が全射であることが分かります.

6. (単射) 写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

が成立するとき,  $f$  は**単射**であるといいます.

**定理 1.2.** ある写像  $g: Y \rightarrow X$  が

$$g \circ f = id_X$$

を満たせば,  $f$  は単射となります.

**証明**  $f(x) = f(x')$  とすると

$$g \circ f(x) = g \circ f(x')$$

から

$$x = x'$$

が従います.

7. (全単射) 写像  $f: X \rightarrow Y$  が全射かつ単射であるとき  $f$  を**全単射**と呼びます.

定理 1.1 と定理 1.2 から次の定理 1.3 が従います.

**定理 1.3.**  $f: X \rightarrow Y$  に逆写像  $g: Y \rightarrow X$  が存在すれば  $f$  は全単射であることが従います.

定理 1.3 の逆が成立します.

**定理 1.4.** 写像  $f: X \rightarrow Y$  が全単射ならば,  $f$  には逆写像が存在します.

**証明** 逆写像  $g: Y \rightarrow X$  を構成します.  $f$  は全射ですから任意の  $y \in Y$  に対して

$$y = f(x)$$

を満たす  $x \in X$  が存在します. しかもこの条件を満たす  $x \in X$  はただ一つ存在します. 実際  $f$  は単射ですから

$$f(x) = f(x') \quad \text{から} \quad x = x'$$

が従うからです. この状況で

$$g(y) := x$$

と定義します. この式を  $y = f(x)$  の  $x$  に代入すると

$$y = f(g(y))$$

が成立することが分かります. さらに任意の  $x \in X$  に対して  $y = f(x)$  と定めると  $g$  の定義から  $g(y) = x$  となりますが

$$g(f(x)) = x$$

が従います.

## 1.6 補足-論理式, 同値式, トートロジー

### 1.6.1 補足-命題関数 (1 変数)

集合  $X$  上定義された命題関数  $P(x), Q(x)$  を考えます. このとき同値式

$$\forall x \in X (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x \in X (P(x))) \wedge (\forall x \in X (Q(x))) \quad (1.39)$$

が成立します. 実際, 任意の  $x \in X$  に対して

$$P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow P(x), \quad P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow Q(x)$$

はそれぞれトートロジーですから

$$\forall x \in X (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X (P(x)), \quad \forall x \in X (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X (Q(x)),$$

が成立します. よって

$$\forall x \in X (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in X (P(x))) \wedge (\forall x \in X (Q(x)))$$

が成立します. 逆に

$$\forall x \in X (P(x)) \quad \text{と} \quad \forall x \in X (Q(x))$$

が成立しているとします. このとき任意の  $x \in X$  に対して  $P(x)$  と  $Q(x)$  が成立しますから,  $P(x) \wedge Q(x)$  が成立します. よって

$$\forall x \in X (P(x) \wedge Q(x))$$

が成立することが分かりました.

次に

$$(\forall x \in X (P(x))) \vee (\forall x \in X (Q(x))) \Rightarrow \forall x \in X (P(x) \vee Q(x)) \quad (1.40)$$

が成立することを示しましょう. 実際, 任意の  $x \in X$  に対して

$$P(x) \Rightarrow (P(x) \vee Q(x)), \quad \text{および} \quad Q(x) \Rightarrow (P(x) \vee Q(x))$$

がトートロジーです. 従って

$$\forall x \in X (P(x)) \Rightarrow \forall x \in X (P(x) \vee Q(x))$$

$$\forall x \in X (Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X (P(x) \vee Q(x))$$

が成立します. 一般にトートロジー

$$(P_1 \Rightarrow P_3) \vee (P_2 \Rightarrow P_3) \Rightarrow ((P_1 \vee P_2) \Rightarrow P_3)$$

が成立することを用いると (1.40) が従います.



**演習 1.11.** (1.40) の逆, すなわち

$$\forall x \in X (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in X (P(x))) \vee (\forall x \in X (Q(x)))$$

が成立しないことを示しましょう.

さらに (1.39), (1.40) と関係する同値式, トートロジーを紹介します.

$$\exists x \in X (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x \in X (P(x))) \vee (\exists x \in X (Q(x))) \quad (1.41)$$

( $\Rightarrow$ ) (1.41) の左辺が成立するとします. すなわち, ある  $a \in X$  に対して  $P(a) \vee Q(a)$  が成立するとします. このとき  $P(a)$  が真であるか, または  $Q(a)$  が真となります.  $P(a)$  が真ならば,  $\exists x \in X (P(x))$  が真となります. 他方  $Q(a)$  が真ならば,  $\exists x \in X (Q(x))$  が真となります. 従っていずれの場合も

$$\exists x \in X (P(x)) \vee \exists x \in X (Q(x))$$

が真となります.

( $\Leftarrow$ ) (1.41) の右辺が成立するとします.  $\exists x \in X (P(x))$  が真ならばある  $a \in X$  に対して  $P(a)$  が真となります. このとき  $P(a) \vee Q(a)$  が真となりますから,  $\exists x \in X (P(x) \vee Q(x))$  が真となります. 他方,  $\exists x \in X (Q(x))$  が真ならばある  $a \in X$  に対して  $Q(a)$  が真となります. このとき  $P(a) \vee Q(a)$  が真となりますから,  $\exists x \in X (P(x) \vee Q(x))$  が真となります.

以上で証明が済みましたが, (1.41) の両辺の否定が同値であることを示すという方法もあります. すなわち

$$\begin{aligned} \neg(\exists x \in X (P(x) \vee Q(x))) &\equiv \forall x \in X (\neg(P(x)) \wedge \neg(Q(x))) \\ &\stackrel{(*)}{\equiv} (\forall x \in X (\neg(P(x)))) \wedge (\forall x \in X (\neg(Q(x)))) \\ &\equiv \neg(\neg(\forall x \in X (\neg(P(x)))) \wedge \neg(\forall x \in X (\neg(Q(x)))))) \\ &\equiv \neg(\exists x \in X (P(x)) \vee \exists x \in X (Q(x))) \end{aligned}$$

から (1.41) が従います. ここで (\*) において (1.39) を用いました.

**演習 1.12.** 同値式

$$\exists x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \equiv (\forall x \in X (P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X (Q(x)))$$

が成立することを示しましょう.

次に (1.40) と関係するトートロジー

$$\exists x \in X (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in X (P(x))) \wedge (\exists x \in X (Q(x))) \quad (1.42)$$

を紹介します. 左辺が真ならば, ある  $a \in X$  に対して  $P(a) \wedge Q(a)$  が成立します. 従って  $P(a)$  と  $Q(a)$  が真です. 従って  $\exists x \in X (P(x))$  と  $\exists x \in X (Q(x))$  が真ですから

$$(\exists x \in X (P(x))) \wedge (\exists x \in X (Q(x)))$$

が真であることが分かります.

**演習 1.13.** (1.42) の対偶が真であることを (1.40) を用いて示しましょう.

**演習 1.14.**

$$\forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\forall x \in X (P(x))) \Rightarrow (\forall x \in X (Q(x))))$$

がトートロジーであることを示しましょう.

**演習 1.15.**

$$\forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\exists x \in X (P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X (Q(x))))$$

がトートロジーであることを示しましょう.

### 1.6.2 補足-命題関数 (多変数)

集合  $X, Y$  があるとします. その直積集合  $X \times Y$  上の命題関数  $P(x, y)$  を考えます. このとき

$$\forall y \in Y (P(x, y)), \quad \exists y \in Y (P(x, y))$$

は  $X$  上の命題関数となります. 他方

$$\forall x \in X (P(x, y)), \quad \exists x \in X (P(x, y))$$

は  $Y$  上の命題関数となります.

実例を考えます.  $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  として、 $X \times Y$  上の命題関数

$$P(x, y) := (2x + y < 8) \quad (1.43)$$

を考えます. このとき  $2x + y$  の値に関する右の表から

$$\forall y \in Y (P(x, y)) \equiv (x = 1)$$

$$\exists y \in Y (P(x, y)) \equiv (x = 1, 2, 3)$$

であることが分かります.

別の実例を考えます.

$$X = Y = \mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R}; x > 0\}$$

として、 $X \times Y$  上の命題関数

$$P(x, y) := (y > x^2)$$

を考えます. すると

$$\forall y \in Y (P(x, y)) \equiv F, \quad \exists y \in Y (P(x, y)) \equiv T$$

| $y \backslash x$ | 1        | 2        | 3        | 4  | 5  |
|------------------|----------|----------|----------|----|----|
| 1                | <b>3</b> | <b>5</b> | <b>7</b> | 9  | 11 |
| 2                | <b>4</b> | <b>6</b> | 8        | 10 | 12 |
| 3                | <b>5</b> | <b>7</b> | 9        | 11 | 13 |
| 4                | <b>6</b> | 8        | 10       | 12 | 14 |
| 5                | <b>7</b> | 9        | 11       | 13 | 15 |

となります. さらに残っている変数  $x \in X$  について考えると

$$\begin{aligned} \forall x \in X (\forall y \in Y (P(x, y))) &\equiv F, & \exists x \in X (\forall y \in Y (P(x, y))) &\equiv F \\ \forall x \in X (\exists y \in Y (P(x, y))) &\equiv T, & \exists x \in X (\exists y \in Y (P(x, y))) &\equiv T \end{aligned}$$

となります. 他方,  $x \in X$  から考えると

$$\forall x \in X (P(x, y)) \equiv F, \quad \exists x \in X (P(x, y)) \equiv T$$

となります. さらに残っている変数  $y \in Y$  について考えると

$$\begin{aligned} \forall y \in Y (\forall x \in X (P(x, y))) &\equiv F, & \exists y \in Y (\forall x \in X (P(x, y))) &\equiv F \\ \forall y \in Y (\exists x \in X (P(x, y))) &\equiv T, & \exists y \in Y (\exists x \in X (P(x, y))) &\equiv T \end{aligned}$$

となります.

このように2変数の命題関数に限定作用素を施して8種類の命題を構成できますが, 紛れない限り括弧を二重にするのはやめて, 例えば

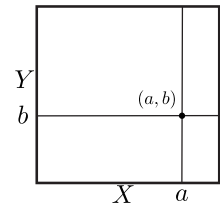
$$\exists x \in X (\forall y \in Y (P(x, y))) \quad \text{は} \quad \exists x \in X \forall y \in Y (P(x, y))$$

と略記することになります. これらの8種類の命題の間で成立することを説明します.

$$\forall (x, y) \in X \times Y (P(x, y)) \equiv \forall x \in X \forall y \in Y (P(x, y)) \equiv \forall y \in Y \forall x \in X (P(x, y)) \quad (1.44)$$

$$\exists (x, y) \in X \times Y (P(x, y)) \equiv \exists x \in X \exists y \in Y (P(x, y)) \equiv \exists y \in Y \exists x \in X (P(x, y)) \quad (1.45)$$

ですが, (1.44), (1.45) とともに図式的に  $X \times Y$  を用いて示すことができます.



一般に1変数の命題関数  $R(y)$  に対して

$$\forall y \in Y (R(y)) \Rightarrow \exists y \in Y (R(y))$$

はトートロジーです. 従って, 任意の  $x \in X$  に対して

$$\forall y \in Y (P(x, y)) \Rightarrow \exists y \in Y (P(x, y))$$

が成立します. よって

$$\forall x \in X \forall y \in Y (P(x, y)) \Rightarrow \forall x \in X \exists y \in Y (P(x, y)) \tag{1.46}$$

$$\exists x \in X \forall y \in Y (P(x, y)) \Rightarrow \exists x \in X \exists y \in Y (P(x, y)) \tag{1.47}$$

がトートロジーであることが分かります. 次に

$$\exists x \in X \forall y \in Y (P(x, y)) \Rightarrow \forall y \in Y \exists x \in X (P(x, y)) \tag{1.48}$$

がトートロジーであることを説明します. 左辺が成立するならば, ある  $a \in X$  に対して

$$\forall y \in Y (P(a, y))$$

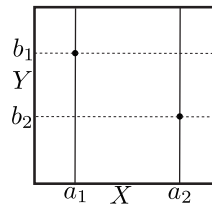
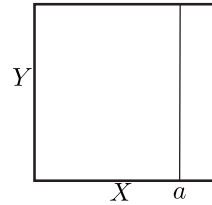
が成立します. 従って任意の  $b \in Y$  に対して

$$P(a, b) \text{ 従って } \exists x \in X (P(x, b))$$

が成立します. さらにこれは

$$\forall y \in Y \exists x \in X (P(x, y))$$

が成立することを意味します. 右上図が左辺, 右下図が右辺が成立することを表しています. すなわち右上図の場合は



$$\{(x, y) \in X \times Y; x = a\}$$

が  $P(x, y)$  の真理集合に含まれているという意味です. また右辺が成立する場合は任意の  $b \in Y$  に対して

$$\{(x, y) \in X \times Y; y = b\}$$

に真理集合の点が少なくとも 1 点含まれていることを意味します.

最後に 2 変数の命題関数  $P(x, y)$  に  $x \in X, Y \in Y$  に関する限定作用素を施して得られる命題, 例えば  $\forall x \in X \exists y \in Y (P(x, y))$  の否定について考えます.

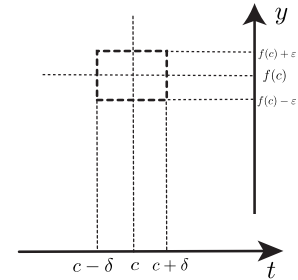
$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in X \exists y \in Y (P(x, y))) &\equiv \exists x \in X \neg(\exists y \in Y (P(x, y))) \\ &\equiv \exists x \in X \forall y \in Y \neg P(x, y) \end{aligned}$$

であることが分かります.

具体的な例を考えます. 开区間  $(a, b)$  上の関数

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$$

が与えられているとします. このとき  $c \in (a, b)$  で  $f$  が連続である必要十分条件は



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in (a, b) (t \in (c - \delta, c + \delta) \Rightarrow f(c) - \varepsilon < f(t) < f(c) + \varepsilon)$$

と定義されます. これを否定すると

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists t \in (a, b) (c - \delta < t < c + \delta \wedge (f(t) \leq f(c) - \varepsilon \vee f(t) \geq f(c) + \varepsilon))$$

となります.

**演習 1.16.**  $X = Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  とします. 以下の命題の真偽値を求めましょう.

(1)  $\forall x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20)$       (2)  $\forall x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20)$

(3)  $\exists x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20)$       (4)  $\exists x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20)$

**演習 1.17.** 演習 1.16 の各命題の否定を求めましょう.

## 章末問題と解答

**I** 集合  $X$  の部分集合  $A, B \subset X$  に対して以下を示しましょう.

$$(i) A \subset B \Leftrightarrow (ii) A = A \cap B \Leftrightarrow (iii) B = A \cup B \quad (1.49)$$

**II** 集合  $X$  の部分集合  $A, B, C \subset X$  に対して以下を示しましょう.

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (1.50)$$

**III** 命題  $P, Q, R$  に対して以下の同値式を示しましょう.

$$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \quad (1.51)$$

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \quad (1.52)$$

**IV** 集合  $X$  の部分集合  $A, B, C \subset X$  に対して以下を示しましょう.

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \quad (1.53)$$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \quad (1.54)$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \quad (1.55)$$

**V** 写像  $f: X \rightarrow Y$  が与えられているとき,  $X$  の部分集合  $A, B \subset X$  に対して以下を示しましょう.

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad (1.56)$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad (1.57)$$

**VI** 写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $g: Y \rightarrow Z$  が与えられているとき, 以下を示しましょう.

(1)  $f, g$  が全射ならば  $g \circ f$  も全射となる.

(2)  $f, g$  が単射ならば  $g \circ f$  も単射となる.

(3)  $g \circ f$  が全射ならば  $g$  も全射となる.

(4)  $g \circ f$  が単射ならば  $f$  も単射となる.

**VII** 写像  $f: X \rightarrow Y$  が与えられているとします.  $Y$  の部分集合  $B$  に対して  $X$  の部分集合

$$f^{-1}(B) := \{x \in X; f(x) \in B\}$$

を定義します ( $B$  の  $f$  による**逆像**と呼びます). このとき  $Y$  の部分集合  $B_1, B_2$  に対して以下を示しましょう.

(1)

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

(2)

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

**I** 集合  $X$  の部分集合  $A, B \subset X$  に対して以下を示しましょう.

$$(i) A \subset B \Leftrightarrow (ii) A = A \cap B \Leftrightarrow (iii) B = A \cup B \quad (1.58)$$

**解答**

(i)  $\Rightarrow$  (ii)

$$A \supset A \cap B$$

が常に成立しますから,  $A \subset A \cap B$  を示せば  $A = A \cap B$  を示すことができます. さらに  $A \subset A$  かつ  $A \subset B$  から

$$A \subset A \cap B$$

が従いますから<sup>3</sup>, (ii) が示せました.

(ii)  $\Rightarrow$  (i)

$$B \cap A \subset B$$

が常に成立しますから,  $A = A \cap B \subset B$  から  $A \subset B$  が従います.

(i)  $\Rightarrow$  (iii)

$$B \subset A \cup B$$

が常に成立しますから,  $B \supset A \cup B$  を示せば  $B = A \cup B$  が示せます. さらに  $B \subset B$  かつ  $A \subset B$  から  $A \cup B \subset B$  が従いますから<sup>4</sup>, (iii) が示せました.

(iii)  $\Rightarrow$  (i)

$$A \subset A \cup B$$

が常に成立しますから

$$A \subset A \cup B = B$$

となりますから,  $A \subset B$  が示せます.

**II** 集合  $X$  の部分集合  $A, B, C \subset X$  に対して以下を示しましょう.

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (1.59)$$

<sup>3</sup> $A, B, C \subset X$  のとき

$$(A \subset B \text{ かつ } A \subset C) \Rightarrow A \subset B \cap C$$

が成立することを用いています.

<sup>4</sup> $A, B, C \subset X$  のとき

$$(A \subset C \text{ かつ } B \subset C) \Rightarrow A \cup B \subset C$$

が成立することを用いています.





この真理表から  $(P, Q, R)$  の8通りの真偽の組み合わせにおいて  $(P \vee Q) \wedge R$  と  $(P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$  の真偽がすべて一致しているので,

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R) \quad (1.63)$$

であることが分かります.

**IV** 集合  $X$  の部分集合  $A, B, C \subset X$  に対して以下を示しましょう.

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \quad (1.64)$$

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) \quad (1.65)$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \quad (1.66)$$

**解答**

(1.64) について

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \setminus C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

(1.65) について

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \setminus C &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup C) \end{aligned}$$

ここで命題  $P, Q, R$  に対して

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

が成立することを用いています<sup>5</sup>.

(1.66) について

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \setminus C &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \end{aligned}$$

<sup>5</sup>この結果があるのでこの両辺にある命題を  $P \wedge Q \wedge R$  と記していいことが分かる.

**V** 写像  $f: X \rightarrow Y$  が与えられているとき,  $X$  の部分集合  $A, B \subset X$  に対して以下を示しましょう.

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad (1.67)$$

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad (1.68)$$

### 解答

(1.67) について

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in A \cup B \ y = f(x) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in A \ y = f(x)) \vee (\exists x \in B \ y = f(x)) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

上で以下を用いていることに注意しましょう.

集合  $X$  上の命題関数  $P(x)$  と  $X$  の部分集合  $A, B \subset X$  に対して

$$\exists x \in A \cup B \ (P(x)) \equiv (\exists x \in A \ (P(x))) \vee (\exists x \in B \ (P(x)))$$

が成立します.

これがすぐ見えたなら以下の説明は不要ですが, 少し解説しましょう.

まず集合  $X$  上の命題関数  $P(x)$  と  $Q(x)$  に対して

$$\exists x \in X \ (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x \in X \ (P(x))) \vee (\exists x \in X \ (Q(x)))$$

が成立することに注意しましょう. また  $X$  の部分集合  $A$  に対して

$$\exists x \in A \ (P(x)) \equiv \exists x \in X \ (x \in A \wedge P(x))$$

も成立します. これを用いると

$$\begin{aligned} \exists x \in A \cup B \ (P(x)) &\equiv \exists x \in X \ (x \in A \cup B \wedge P(x)) \\ &\equiv \exists x \in X \ ((x \in A \vee x \in B) \wedge P(x)) \\ &\equiv \exists x \in X \ ((x \in A \wedge P(x)) \vee (x \in B \wedge P(x))) \\ &\equiv \exists x \in X \ (x \in A \wedge P(x)) \vee \exists x \in X \ (x \in B \wedge P(x)) \\ &\equiv (\exists x \in A \ (P(x))) \vee (\exists x \in B \ (P(x))) \end{aligned}$$

が導けます.

(1.68) について

まず以下の (1.69) を示します.

$X$  の部分集合  $A_1, A_2 \subset X$  に対して

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2) \quad (1.69)$$

が成立します.

実際

$$\begin{aligned} y \in f(A_1) &\Leftrightarrow \exists x \in A_1 \ y = f(x) \\ &\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \exists x \in A_2 \ y = f(x) \Leftrightarrow y \in f(A_2) \end{aligned}$$

と示せます. ここで (\*) において以下を用いています.

集合  $X$  上の命題関数  $P(x)$  が与えられているときに  $X$  の部分集合  $A, B$  が  $A \subset B$  を満たすならば

$$(\exists x \in A \ (P(x))) \Rightarrow (\exists x \in B \ (P(x)))$$

が常に成立します.

最後に (1.68) を示します.

$$A \cap B \subset A, \quad A \cap B \subset B$$

が常に成立しますから

$$f(A \cap B) \subset f(A), \quad f(A \cap B) \subset f(B)$$

が (1.69) を用いると導けます. これから

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

であることが従います.

**VI** 写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $g: Y \rightarrow Z$  が与えられているとき, 以下を示しましょう.

- (1)  $f, g$  が全射ならば  $g \circ f$  も全射となる.
- (2)  $f, g$  が単射ならば  $g \circ f$  も単射となる.
- (3)  $g \circ f$  が全射ならば  $g$  も全射となる.
- (4)  $g \circ f$  が単射ならば  $f$  も単射となる.

**解答**

(1) 任意の  $z \in Z$  をとります.  $g$  が全射なので  $\exists y \in Y$  が存在して

$$z = g(y)$$

が成立します.  $f$  が全射なので, この  $y \in Y$  に対して  $\exists x \in X$  が存在して

$$y = f(x)$$

が成立します. このとき

$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

が成立します. よって  $g \circ f$  は全射であることが分かります.

(2)  $x, x' \in X$  に対して

$$g \circ f(x) = g \circ f(x') \quad \text{すなわち} \quad g(f(x)) = g(f(x'))$$

が成立するとします.  $g$  が単射なので

$$f(x) = f(x')$$

が成立します. さらに  $f$  が単射なので

$$x = x'$$

が従います. よって  $g \circ f$  は単射であることが分かります.

(3)  $g \circ f$  が全射なので  $\forall z \in Z$  に対して  $\exists x \in X$  が存在して

$$z = g \circ f(x) = g(f(x))$$

が成立します. ここで  $f(x) \in Y$  なので  $g$  が全射であることが分かります.

(4)  $x, x' \in X$  に対して  $f(x) = f(x')$  が成立すると仮定します. このとき

$$g(f(x)) = g(f(x')) \quad \text{すなわち} \quad g \circ f(x) = g \circ f(x')$$

が従います. ここで  $g \circ f$  が単射であることを用いると

$$x = x'$$

となります. よって  $f$  は単射であることが示されました.

**VII** 写像  $f: X \rightarrow Y$  が与えられているとします.  $Y$  の部分集合  $B$  に対して  $X$  の部分集合

$$f^{-1}(B) := \{x \in X; f(x) \in B\}$$

を定義します ( $B$  の  $f$  による逆像と呼びます). このとき  $Y$  の部分集合  $B_1, B_2$  に対して以下を示しましょう.

(1)

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

(2)

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

解答 (1)

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \\&\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \\&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2) \\&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \\&\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \\&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \\&\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)\end{aligned}$$



から

$$\text{(交換則)} \quad P \wedge Q \equiv Q \wedge P, \quad P \vee Q \equiv Q \vee P$$

が分かります.

(1.5)

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \wedge Q$ | $(P \wedge Q) \wedge R$ | $Q \wedge R$ | $P \wedge (Q \wedge R)$ |
|-----|-----|-----|--------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| T   | T   | T   | T            | T                       | T            | T                       |
| T   | T   | F   | T            | F                       | F            | F                       |
| T   | F   | T   | F            | F                       | F            | F                       |
| T   | F   | F   | F            | F                       | F            | F                       |
| F   | T   | T   | F            | F                       | T            | F                       |
| F   | T   | F   | F            | F                       | F            | F                       |
| F   | F   | T   | F            | F                       | F            | F                       |
| F   | F   | F   | F            | F                       | F            | F                       |

から

$$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

であることが分かります. 他方

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \vee Q$ | $(P \vee Q) \vee R$ | $Q \vee R$ | $P \vee (Q \vee R)$ |
|-----|-----|-----|------------|---------------------|------------|---------------------|
| T   | T   | T   | T          | T                   | T          | T                   |
| T   | T   | F   | T          | T                   | T          | T                   |
| T   | F   | T   | T          | T                   | T          | T                   |
| T   | F   | F   | T          | T                   | F          | T                   |
| F   | T   | T   | T          | T                   | T          | T                   |
| F   | T   | F   | T          | T                   | T          | T                   |
| F   | F   | T   | F          | T                   | T          | T                   |
| F   | F   | F   | F          | F                   | F          | F                   |

から

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

であることが分かります.

(1.6), (1.7) は章末問題 III です.

### 演習 1.3

| $P$ | $\neg(P)$ | $\neg(\neg(P))$ |
|-----|-----------|-----------------|
| T   | F         | T               |
| F   | T         | F               |

から 2 重否定の法則

$$\neg(\neg(P)) \equiv P$$

が成立することが分かります.

#### 演習 1.4

| P | Q | $P \vee Q$ | $P \Rightarrow (P \vee Q)$ |
|---|---|------------|----------------------------|
| T | T | T          | T                          |
| T | F | T          | T                          |
| F | T | T          | T                          |
| F | F | F          | T                          |

から

$$P \Rightarrow (P \vee Q)$$

がトートロジーであることが分かります.

#### 演習 1.5 (1.13)

| P | $P \Rightarrow P$ |
|---|-------------------|
| T | T                 |
| F | T                 |

から

$$P \Rightarrow P$$

がトートロジーであることが分かります (同一律).

(1.15)

| P | $\neg(P)$ | $P \wedge \neg(P)$ | $\neg(P \wedge \neg(P))$ |
|---|-----------|--------------------|--------------------------|
| T | F         | F                  | T                        |
| F | T         | F                  | T                        |

から

$$\neg(P \wedge \neg(P))$$

がトートロジーであることが分かります (矛盾律).

#### 演習 1.6

$$((P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \quad (1.70)$$



の真偽について真理表を作ります.

| $P$ | $Q$ | $R$ | $*_1 := (Q \Rightarrow R)$ | $*_2 := (P \Rightarrow *_1)$ | $*_3 := P \Rightarrow Q$ | $*_2 \wedge *_3$ | $P \Rightarrow R$ | (1.70) |
|-----|-----|-----|----------------------------|------------------------------|--------------------------|------------------|-------------------|--------|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$                        | $T$                          | $T$                      | $T$              | $T$               | $T$    |
| $T$ | $T$ | $F$ | $F$                        | $F$                          | $T$                      | $F$              | $F$               | $T$    |
| $T$ | $F$ | $T$ | $T$                        | $T$                          | $F$                      | $F$              | $T$               | $T$    |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$                        | $T$                          | $F$                      | $F$              | $F$               | $T$    |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$                        | $T$                          | $T$                      | $T$              | $T$               | $T$    |
| $F$ | $T$ | $F$ | $F$                        | $T$                          | $T$                      | $T$              | $T$               | $T$    |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$                        | $T$                          | $T$                      | $T$              | $T$               | $T$    |
| $F$ | $F$ | $F$ | $T$                        | $T$                          | $T$                      | $T$              | $T$               | $T$    |

から (1.70) がトートロジーであることが分かります.

または以下のように同値式として変形して示すこともできます.

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &\stackrel{(*)}{\equiv} [P \Rightarrow \{Q \wedge (Q \Rightarrow R)\}] \Rightarrow (P \Rightarrow R) \\
 &\stackrel{(**)}{\equiv} [P \Rightarrow (Q \wedge R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R) \\
 &\equiv [(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R) \\
 &\equiv \neg(P \Rightarrow Q) \vee \neg(P \Rightarrow R) \vee (P \Rightarrow R)
 \end{aligned}$$

において最右辺はトートロジーとなります. 実際, 命題  $Q, R$  に対して

$$Q \vee \neg(R) \vee R$$

は任意の  $Q$  に対して真になります. 以上で与式がトートロジーであることが分かります.

上で (\*) において, 同値式

$$(P \Rightarrow Q_1) \wedge (P \Rightarrow Q_2) \equiv (P \Rightarrow (Q_1 \wedge Q_2))$$

が成立することを, (\*\*) において同値式

$$Q \wedge (Q \Rightarrow R) \equiv Q \wedge R$$

が成立することを用いていることに注意しましょう.

## 演習 1.7

| $P$ | $Q$ | $R$ | $\#_1 := (P \Rightarrow Q)$ | $\#_2 := (Q \Rightarrow R)$ | $\#_1 \wedge \#_2$ | $P \Rightarrow R$ | (1.21) |
|-----|-----|-----|-----------------------------|-----------------------------|--------------------|-------------------|--------|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$                         | $T$                         | $T$                | $T$               | $T$    |
| $T$ | $T$ | $F$ | $T$                         | $F$                         | $F$                | $F$               | $T$    |
| $T$ | $F$ | $T$ | $F$                         | $T$                         | $F$                | $T$               | $T$    |
| $T$ | $F$ | $F$ | $F$                         | $T$                         | $F$                | $F$               | $T$    |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$                         | $T$                         | $T$                | $T$               | $T$    |
| $F$ | $T$ | $F$ | $T$                         | $F$                         | $F$                | $T$               | $T$    |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$                         | $T$                         | $T$                | $T$               | $T$    |
| $F$ | $F$ | $F$ | $T$                         | $T$                         | $T$                | $T$               | $T$    |

から (1.21) がトートロジーであることが分かります.

演習 1.8 章末問題 II です.

演習 1.9 章末問題 IV にあります.

演習 1.10 任意の  $x \in X$  に対して

$$\begin{aligned}(h \circ g) \circ f(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h(g(f(x)))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h \circ (g \circ f)(x) &= h(g \circ f(x)) \\ &= h(g(f(x)))\end{aligned}$$

から

$$(h \circ g) \circ f(x) = h \circ (g \circ f)(x)$$

であることが分かります. これは

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

を意味します.

演習 1.11 例えば  $X = \mathbf{R}$  上の命題関数

$$P(x) : x > -1$$

$$Q(x) : x < 1$$

が反例となります.

演習 1.12

$$\begin{aligned}
\exists x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) &\equiv \exists x \in X (\neg(P(x)) \vee Q(x)) \\
&\equiv \exists x \in X (\neg(P(x))) \vee \exists x \in X (Q(x)) \\
&\equiv (\forall x \in X (P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X (Q(x)))
\end{aligned}$$

**演習 1.13**

$$\begin{aligned}
(1.42) \stackrel{(*)}{\equiv} \neg(\exists x \in X (P(x)) \wedge \exists x \in X (Q(x))) &\Rightarrow \neg(\exists x \in X (P(x) \wedge Q(x))) \\
&\stackrel{(**)}{\equiv} (\forall x \in X (\neg P(x)) \vee \forall x \in X (\neg Q(x))) \Rightarrow \forall x \in X ((\neg P(x)) \vee (\neg Q(x)))
\end{aligned}$$

において, (1.40) から最右辺が真であることが分かりますから, (1.42) が真であることが従います.

**演習 1.14**

$$\begin{aligned}
\forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) &\Rightarrow ((\forall x \in X (P(x))) \Rightarrow (\forall x \in X (Q(x)))) \\
&\stackrel{(i)}{\equiv} (\forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x \in X (P(x))) \Rightarrow \forall x \in X (Q(x)) \\
&\equiv \forall x \in X ((P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (P(x))) \Rightarrow \forall x \in X (Q(x)) \\
&\stackrel{(ii)}{\equiv} \forall x \in X (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x \in X (Q(x)) \\
&\equiv (\forall x \in X (P(x)) \wedge \forall x \in X (Q(x))) \Rightarrow \forall x \in X (Q(x))
\end{aligned}$$

となります. 最右辺が常に真となるのは, 一般に命題  $P, Q$  に対して

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

が常に真となることから容易に示せます. 上で (i) は同値式

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R \tag{1.71}$$

を用いました. 他方 (ii) では恒等式

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge Q \tag{1.72}$$

を用いました.

**演習 1.15** 同値式

$$\begin{aligned}
& \forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\exists x \in X (P(x))) \Rightarrow (\exists x \in X (Q(x)))) \\
& \equiv \forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow ((\neg(\exists x \in X (Q(x)))) \Rightarrow (\neg(\exists x \in X (P(x)))))) \\
& \equiv \forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in X \neg(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg(P(x))) \\
& \equiv (\forall x \in X (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x \in X \neg(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg(P(x))) \\
& \equiv \forall x \in X ((P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \neg(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg(P(x))) \\
& \equiv \forall x \in X ((\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)) \wedge \neg(Q(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg(P(x))) \\
& \equiv \forall x \in X ((\neg Q(x)) \wedge (\neg P(x))) \Rightarrow (\forall x \in X \neg(P(x))) \\
& \equiv (\forall x \in X (\neg Q(x)) \wedge \forall x \in X (\neg P(x))) \Rightarrow \forall x \in X (\neg P(x))
\end{aligned}$$

の最右辺が常に真であることが容易に示せます。

**演習 1.16** 右の表から

$$\begin{aligned}
\forall y \in Y (x^2 + y < 20) & \equiv (x = 1, 2, 3) \\
\exists y \in Y (x^2 + y < 20) & \equiv (x = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}$$

であることが分かります。従って各命題の真偽が以下のように求められます。

| $y \setminus x$   | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  |    |
|---|---|---|---|----|----|----|
| (1) $\forall x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20) \equiv F$ | 1 | 2 | 5 | 10 | 17 | 26 |
| (2) $\forall x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20) \equiv F$ | 2 | 3 | 6 | 11 | 18 | 27 |
| (3) $\exists x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20) \equiv T$ | 3 | 4 | 7 | 12 | 19 | 28 |
| (4) $\exists x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20) \equiv T$ | 4 | 5 | 8 | 13 | 20 | 29 |
|   | 5 | 6 | 9 | 14 | 21 | 30 |

**演習 1.17 (1)**

$$\neg(\forall x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20)) \exists x \in X \exists y \in Y (x^2 + y \geq 20)$$

(2)

$$\neg(\forall x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20)) \exists x \in X \forall y \in Y (x^2 + y \geq 20)$$

(3)

$$\neg(\exists x \in X \forall y \in Y (x^2 + y < 20)) \forall x \in X \exists y \in Y (x^2 + y \geq 20)$$

(4)

$$\neg(\exists x \in X \exists y \in Y (x^2 + y < 20)) \forall x \in X \forall y \in Y (x^2 + y \geq 20)$$