第3章　座標空間と数ベクトル

3.1　クラメールの公式・ベクトルの平行

連立1次方程式

$$\begin{cases} ax + by = \alpha_1 & (1) \\ cx + dy = \alpha_2 & (2) \end{cases}$$

を考えます．(1) $\times d -$ (2) $\times b$ と (1) $\times c -$ (2) $\times a$ を考えるとを計算すると

$$(ad - bc)x = \alpha_1 d - \alpha_2 b, \quad (bc - ad)y = \alpha_1 c - \alpha_2 a$$

を得ます．

ここで2次の**行列式** (*determinant*) を

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{3.1}$$

と定めると，この2式は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b \\ \alpha_2 & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & \alpha_1 \\ c & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

となります．ここで

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

を仮定すれば

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b \\ \alpha_2 & d \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

および

$$y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & \alpha_1 \\ c & \alpha_2 \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

と計算されます．この公式を**クラメールの公式** (*Cramer's rule*) と呼びます．

特に $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ のとき

$$\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

が成立しますから

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \left(\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \right)$$

が成立することが示されました．実はこの逆も成立します.

定理 3.1. *(1)*

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \left(\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \right)$$

(2)

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \exists (x,y) \neq (0,0) \left(\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \right)$$

Proof. **(2)** において

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0 \Rightarrow \exists (x,y) \neq (0,0) \left(\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \right)$$

を示せば十分です．これは以下のように場合分けをして示せます.

(i) $(a,b) \neq (0,0)$ のとき

$$ad - bc = 0$$

を用いると $(x,y) = (-b,a) \neq (0,0)$ が連立 1 次方程式を満たします.

(ii) $(c,d) \neq (0,0)$ のとき

$$ad - bc = 0$$

を用いると $(x,y) = (d,-c) \neq (0,0)$ が連立 1 次方程式を満たします.

(iii) (i) でも (ii) でもないとき $a = b = c = d = 0$ が成立しますから，この場合は明らかでしょう. □

ここで

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

に対して

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \begin{pmatrix} xa_1 + yb_1 \\ xa_2 + yb_2 \end{pmatrix}$$

であることに注意すると定理 3.1 は次のように言い換えることができます.

定理 3.2. *(1)*

$$|\vec{a}\ \vec{b}| \neq 0 \Leftrightarrow \left(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0\right)$$

(2)

$$|\vec{a}\ \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \neq (0,0) \left(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}\right)$$

以下

$$\vec{a} \nparallel \vec{b} \Leftrightarrow \left(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0\right)$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \neq (0,0) \left(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}\right)$$

によってベクトルの非平行，平行を定義します.（この定義は n 次元列ベクトル，n 次元行ベクトルでもそのまま使えることに注意しましょう.）

ここで

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

が成立することに注意すると，行ベクトル

$$\mathbf{a} = (a_1\ a_2), \quad \mathbf{b} = (b_1\ b_2)$$

に対しても

$$\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

が成立することが分かります.

3.2　平面の交わり

2 平面の交わり

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \alpha_1 & (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = \alpha_2 & (2) \end{cases}$$

を考えます. (1) と (2) の法線ベクトルについて

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

が成立するとします．さらに

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

を仮定すると，クラメールの公式を用いて

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} -c_1 z + \alpha_1 & b_1 \\ -c_2 z + \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\frac{z}{D}\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 z + \alpha_1 \\ a_2 & -c_2 z + \alpha_2 \end{vmatrix} = -\frac{z}{D}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

が従います．ここで行列式について次の定理が成立することを用いています．

定理 3.3. ***(i)*** **（各列の線型性）**

$$|\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}\ \vec{b}| = \lambda|\vec{x}\ \vec{b}| + \mu|\vec{y}\ \vec{b}|$$

$$|\vec{a}\ \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}| = \lambda|\vec{a}\ \vec{x}| + \mu|\vec{a}\ \vec{y}|$$

(ii) **（交代性）** $|\vec{a}\ \vec{b}| = -|\vec{b}\ \vec{a}|$
(ii)' **（交代性）** $|\vec{a}\ \vec{a}| = 0$

さらに $t = \frac{z}{D}$ とパラメータを定めると，上の結果をベクトルで表すことによって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \frac{1}{D}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}$$

と 2 直線の交わりは直線としてパラメータ表示される．そして

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 := \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

が直線の方向ベクトルとなることに注意しよう．このベクトルを $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ の**外積**と呼びます．ここで $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ が直線を定める 2 平面の法線ベクトルであることを思い出すと，直感的には

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_1 \times \vec{p}_2) = (\vec{p}_2, \vec{p}_1 \times \vec{p}_2) = 0 \tag{3.4}$$

が分かることにも注意しましょう．代数的にも (3.7) で示します．
　ここで $\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \neq \vec{0}$ すなわち

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \mathrm{OR} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \mathrm{OR} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

を仮定すると

$$\begin{cases} a_1\lambda + a_2\mu = 0 \\ b_1\lambda + b_2\mu = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \mu = 0 \\ c_1\lambda + c_2\mu = 0 \end{cases}$$

すなわち

$$\lambda\vec{p}_1 + \mu\vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

が成立することに注意しましょう．従って

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$$

が示されました．実はさらにこの逆も成立します．

定理 3.4. *(1)*

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$$

(2)

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$$

　$||\vec{p}_1 \times \vec{p}_2||$ が $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ によって定められる平行四辺形の面積 S であること

$$S = ||\vec{p}_1 \times \vec{p}_2||$$

((3.9) 参照）を用いると，示すべき「逆」

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$$

は直感的に明らかです．しかし代数的に示すのはこの時点では無手勝に示すことになるので少し複雑となりますが，将来的に

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^tA)$$

が行列 A に対して成立することと関連して示されます．

3.3　3 次元ベクトルの外積・3 次の行列式

3.3.1　定義

　3 次元ベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

に対して，行列式（スカラー 3 重積）を

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})
\end{aligned}
$$

さらに 2 次の行列式を展開すると

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \tag{3.5}
$$

となります．ここで

$$
i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i,\ i, j, k \in \{1, 2, 3\}
$$

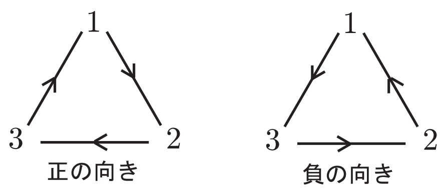
を満たす $(i\ j\ k)$ 全体を S_3 とすると，$(i\ j\ k) \in S_3$ に対してだけ

$$
a_i b_j c_k
$$

が現れていることに注意しましょう．このような $(i\ j\ k)$ は $3! = 6$ 通りであることが分かります．$a_i b_j c_k$ の前の符号に関しては

$$
i \longrightarrow j \longrightarrow k \longrightarrow i
$$

が正の向きの場合に正であり，負の場合に負であることも分かります．



ここで $i \neq j,\ j \neq k, k \neq i$ を満たす $(i\ j\ k) \in S_3$ に対して

$$
\varepsilon(i\ j\ k) = \begin{cases} +1 & ((i\ j\ k)\text{が正の向き}) \\ -1 & ((i\ j\ k)\text{が負の向き}) \end{cases}
$$

と定めます．これを用いると上の 3 次正方行列 $A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ に対して

$$
\det(A) = \sum_{i \neq j,\ j \neq k, k \neq i} \varepsilon(i\ j\ k) \cdot a_i b_j c_k \tag{3.6}
$$

が成立することに注意しましょう．

次に (3.5) において b_1，b_2，b_3（または c_1，c_2，c_3）について整理すると，次の各列に関する**余因子展開**が成立することにも注意しよう．

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

3 次の行列式の基本性質については後に詳細を述べますが，以下ですぐに必要になる性質についてまとめましょう．

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ に対して以下が成立します．

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| = -|\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}| = -|\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}| = -|\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}|$$

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{b}| = |\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a}| = |\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{c}| = 0$$

これらは 2 次の行列式の交代性（定理 3.3）と余因子展開を用いて示せます．

3.3.2　ベクトルの外積・行列式の幾何学的な意味

ベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の**外積**（**ベクトル積**）を右のように定めました．外積 $\vec{b} \times \vec{c}$ は

$$\vec{b} \perp \vec{b} \times \vec{c}, \qquad \vec{c} \perp \vec{b} \times \vec{c} \tag{3.7}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

を満たすことを (3.4) で直観的に説明してあります．厳密にこのことを示すために公式

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| = (\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}) \tag{3.8}$$

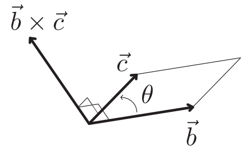
が成立することに注意します．この公式を用いると

$$(\vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}) = |\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{c}| = 0$$

が従い，$\vec{b} \perp \vec{b} \times \vec{c}$ が分かります．また $\vec{c} \perp \vec{b} \times \vec{c}$ も同様です．

次に $\vec{b}\times\vec{c}$ の大きさについて注意します．2 本のベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が定める平行四辺形の面積 S について考えます．$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ とします．このとき

$$\begin{aligned} S &= ||\vec{b}||\cdot||\vec{c}||\cdot\sin\theta \\ &= ||\vec{b}||\cdot||\vec{c}||\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= ||\vec{b}||\cdot||\vec{c}||\cdot\sqrt{1-\left(\frac{(\vec{b},\vec{c})}{||\vec{b}||\cdot||\vec{c}||}\right)^2} \\ &= \sqrt{||\vec{b}||^2\cdot||\vec{c}||^2-(\vec{b},\vec{c})^2} \end{aligned}$$



から

$$\begin{aligned} S^2 &= ||\vec{b}||^2\cdot||\vec{c}||^2-(\vec{b},\vec{c})^2 \\ &= \left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right)-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)^2 \\ &= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2=||\vec{b}\times\vec{c}||^2 \end{aligned}$$

を得ます．すなわち

$$S=||\vec{b}\times\vec{c}|| \tag{3.9}$$

を示しました．$\vec{b}$ と $\vec{c}$ に垂直で大きさが S であるベクトルは 2 本ありますが，そのどちらが $\vec{b}\times\vec{c}$ になるのかについて軽く説明します．座標系が**右手系**の場合は，$\vec{b}$ から $\vec{c}$ へ右手の親指以外の 4 本の指を揃えて向かうときに親指が向かう方向が $\vec{b}\times\vec{c}$ です（**右ねじの向き**）．また座標系が**左手系**の場合は，同じことを左手で行います.（前ページの図は，右手系の場合を考えています.）詳しくは述べられませんが (3.8) を用いて得られる

$$\det(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{b}\times\vec{c})=||\vec{b}\times\vec{c}||^2>0$$

が $\vec{b}\times\vec{c}\neq\vec{0}$ であるときに成立することから，$\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{b}\times c$ が標準単位ベクトルを用いた $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ と同じ「向き」を持ちます．このことから以上の事実が示せます．

公式 (3.9) を用いて，3 次の行列式の幾何的な性質について説明します．3 本のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が定める平行 6 面体の体積を V とします．$\vec{b}$, $\vec{c}$ が定める平行四辺形を底面として体積 V を考えます．すると垂直方向 $\vec{b}\times\vec{c}$ と $\vec{a}$ とのなす角を φ とすると，高さ h は

$$h=|\ ||\vec{a}||\cdot\cos\varphi\ |=\left|||\vec{a}||\cdot\frac{(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})}{||\vec{a}||\cdot||\vec{b}\times\vec{c}||}\right|=\left|\frac{(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})}{||\vec{b}\times\vec{c}||}\right|$$

と計算されます．これから

$$V=S\cdot h=||\vec{b}\times\vec{c}||\cdot\left|\frac{(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})}{||\vec{b}\times\vec{c}||}\right|=\left|(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})\right|=\left|\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\right|$$

となります．

演習 3.1. ベクトルの外積について以下の性質が成立することを示しましょう.
(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a},\quad \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$　*(2)* $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$
(3) $(\lambda\vec{a})\times b=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

演習 3.2. $\vec{a}={}^t(1\ 1\ 0),\ \vec{b}={}^t(0\ 1\ \ -1),\ \vec{c}={}^t(1\ 2\ 3)$ に対して，以下を求めましょう.
(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積.　*(2)* $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交する単位ベクトル.
(3) $\vec{a}$ と $\vec{b},\ \vec{c}$ が張る平行六面体の体積.

3.4　内積・直交射影

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n,\quad \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n,$$

に対して $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=(\vec{x},\vec{y})=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$$

と定めます．さらに $\vec{x}$ の大きさ（ノルム）を

$$||\vec{x}||=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$

と定めます.

ベクトルの内積と大きさについては次の定理が成立します.

定理 3.5. $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}\in\mathbf{R}^n$ と $\lambda\in\mathbf{R}$ に対して

$$(\vec{x}+\vec{y},\vec{z})=(\vec{x},\vec{z})+(\vec{y},\vec{z}) \tag{3.10}$$

$$(\vec{x},\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x},\vec{y})+(\vec{x},\vec{z}) \tag{3.11}$$

$$(\lambda\vec{x},\vec{y})=(\vec{x},\lambda\vec{y})=\lambda(\vec{x},\vec{y}) \tag{3.12}$$

$$(\vec{x},\vec{y})=(\vec{y},\vec{x}) \tag{3.13}$$

$$||\lambda\vec{x}||=|\lambda|\cdot||\vec{x}|| \tag{3.14}$$

$$||\vec{x}||\geqq 0,\quad ||\vec{x}||=0\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{0} \tag{3.15}$$

さらに定理 3.5 を用いて

$$||\vec{x}\pm\vec{y}||^2=||\vec{x}||^2\pm 2(\vec{x},\vec{y})+||\vec{y}||^2 \tag{3.16}$$

を示すことができます.

演習 3.3. (3.16) を示しましょう.

最後に $\vec{x} \neq 0$ のとき

$$f(t) = ||\vec{y} - t\vec{x}||^2$$

の最小値を求めてみましょう.

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2||\vec{x}||^2 - 2t(\vec{x},\vec{y}) + ||\vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2\left(t^2 - 2\frac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}||^2}t + \frac{||\vec{y}||^2}{||\vec{x}||^2}\right) \\ &= ||\vec{x}||^2\left\{\left(t - \frac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}||^2}\right)^2 + \frac{||\vec{y}||^2}{||\vec{x}||^2} - \frac{(\vec{x},\vec{y})^2}{||\vec{x}||^4}\right\} \end{aligned}$$

ですから $t = t_0 := \dfrac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}||^2}$ であるときに $f(t)$ は最小値

$$||\vec{y}||^2 - \frac{(\vec{x},\vec{y})^2}{||\vec{x}||^2} = \frac{1}{||\vec{x}||^2}\left(||\vec{x}||^2||\vec{y}||^2 - (\vec{x},\vec{y})^2\right) \tag{3.17}$$

をとります．さらに

$$\begin{aligned} (\vec{y} - t_0\vec{x}, \vec{x}) &= (\vec{y},\vec{x}) - t_0||\vec{x}||^2 \\ &= (\vec{y},\vec{x}) - \frac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}||^2}||\vec{x}||^2 = 0 \end{aligned}$$

から

$$\vec{y} - t_0\vec{x} \perp \vec{x}$$

であることが分かります.

$$t_0\vec{x} = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{||\vec{x}||^2}\vec{x}$$

を $\vec{y}$ の $\vec{x}$方向への正射影（直交射影）と呼びます.

さらに

$$0 \leq ||\vec{y} - t_0\vec{x}||^2 = \frac{||\vec{x}||^2 \cdot ||\vec{y}||^2 - (\boldsymbol{x},\vec{y})^2}{||\vec{x}||^2}$$

から次の定理を得ます.

定理 3.6.（コーシー・シュヴァルツの不等式） $\vec{x},\vec{y} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$|(\vec{x},\vec{y})| \leq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$$

が成立します.

演習問題

I $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{c}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + 2(\vec{b},\vec{c}) + 2(\vec{a},\vec{c})$$

が成立することを示しましょう.（「線型代数学」旧教科書 13 ページ，新教科書 12 ページ，演習 1.17）

II $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ がすべての $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して垂直，すなわち

$$(\vec{a},\vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^n)$$

が成立するとします．このとき $\vec{a} = \vec{0}$ となることを示しましょう.（「線型代数学」教科書 13 ページ，演習 1.19，新教科書では演習 1.20）

III $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \in \mathbf{R}^n$ が

$$(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすとします.

(1)

$$||x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2||^2 = x^2 + y^2$$
$$||x\vec{f}_1 + y\vec{f}_2 + z\vec{f}_3||^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

を示しましょう.

(2) $\vec{g} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{g} - x\vec{f}_1 - y\vec{f}_2||^2 = ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g},\vec{f}_1) - 2y(\vec{g},\vec{f}_2)$$

が成立することを示しましょう.

IV

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases}$$

を満たす (x,y,z) に対してクラメールの公式を用いて x, y を z で表しましょう.

V

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して $||\vec{a} - t\vec{b}||^2$ を最小にする t を求めましょう.

VI

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします.

(1) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ であることを示しましょう.

(2) $||\vec{g} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2$ を最小にする x, y を求めましょう.

VII

(1) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ とします. $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ であるとき, $\vec{a}, \vec{b}$ が作る平行四辺形の面積は

$$||\vec{a} \times \vec{b}||$$

であることを示しましょう. また

$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}) = 0$$

であることを示しましょう.

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ とします. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$ であるとき, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が作る平行四面体の体積は

$$|(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})|$$

であることを示しましょう.

VIII $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ とします. このとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},\ \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

が成立することを示しましょう.

IX

直線 ℓ_1

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 3x - 2y + z + 5 = 0 \end{cases}$$

直線 ℓ_2

$$\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ 3x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

があります. 原点を通り直線 ℓ_1, ℓ_2 に交わる直線を求めましょう.

X 次の 3 点を通る平面の方程式を求めましょう.

(1) $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$

(2) $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 4)$

(3) $(1, 2, 3)$, $(-1, -1, 0)$, $(2, -3, 5)$

XI $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします. 平面

$$ax + by + cz + q = 0$$

と点 (x_0, y_0, z_0) の距離 δ は

$$\delta = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + q|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

となることを示しましょう.

I $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}||^2 = ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{c}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + 2(\vec{b},\vec{c}) + 2(\vec{a},\vec{c})$$

が成立することを示しましょう.（「線型代数学」旧教科書 13 ページ，新教科書 12 ページ，演習 1.17）

解答　公式

$$||\vec{a}+\vec{b}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + ||\vec{b}||^2$$

を用います.

$$\begin{aligned} ||\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}||^2 &= ||\vec{a}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) + ||\vec{b}+\vec{c}||^2 \\ &= ||\vec{a}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + 2(\vec{a},\vec{c}) + ||\vec{b}||^2 + 2(\vec{b},\vec{c}) + ||\vec{c}||^2 \\ &= ||\vec{a}||^2 + ||\vec{b}||^2 + ||\vec{c}||^2 + 2(\vec{a},\vec{b}) + 2(\vec{b},\vec{c}) + 2(\vec{c},\vec{a}) \end{aligned}$$

II $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ がすべての $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して垂直，すなわち

$$(\vec{a},\vec{x}) = 0 \quad (\vec{x} \in \mathbf{R}^n)$$

が成立するとします．このとき $\vec{a} = \vec{0}$ となることを示しましょう.（「線型代数学」教科書 13 ページ，演習 1.19，新教科書では演習 1.20）

解答 $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とします．他方 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると $0 < \theta < \pi$ が成立します．このとき

$$S = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\theta$$

となります．さらに

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{(\vec{a},\vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2}} = \frac{\sqrt{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a},\vec{b})^2}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

と変形します．ここで最右辺の分子を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の成分で表すと

$$\begin{aligned} \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a},\vec{b})^2} &= \sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) - (a_1b_1+a_2b_2)^2} \\ &= \sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} = |a_1b_2 - a_2b_1| = \left| |\vec{a}\ \vec{b}| \right| \end{aligned}$$

となります．以上をまとめると

$$S = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \frac{\left| |\vec{a}\ \vec{b}| \right|}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \left| |\vec{a}\ \vec{b}| \right|$$

と示すべき等式が成立します.

III $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3} \in \mathbf{R}^n$ が

$$(\vec{f_i}, \vec{f_j}) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすとします.

(1)

$$||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 = x^2 + y^2$$

$$||x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3}||^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

を示しましょう.

(2) $\vec{g} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{g} - x\vec{f_1} - y\vec{f_2}||^2 = ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f_1}) - 2y(\vec{g}, \vec{f_2})$$

が成立することを示しましょう.

解答 (1)

$$\begin{aligned} ||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 &= ||x\vec{f_1}||^2 + 2(x\vec{f_1}, y\vec{f_2}) + ||y\vec{f_2}||^2 \\ &= x^2||\vec{f_1}||^2 + 2xy(\vec{f_1}, \vec{f_2}) + y^2||\vec{f_2}||^2 \\ &= x^2 \cdot 1 + 2xy \cdot 0 + y^2 \cdot 1 = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3}||^2 &= ||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}|| + 2(x\vec{f_1} + y\vec{f_2}, z\vec{f_3}) + ||z\vec{f_3}||^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2xz(\vec{f_1}, \vec{f_3}) + 2yz(\vec{f_2}, \vec{f_3})z^2 \cdot 1 \\ &= x^2 + y^2 + 2xz \cdot 0 + 2yz \cdot 0 + z^2 \cdot 1 = x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

解答 (2)

$$\begin{aligned} ||\vec{g} - x\vec{f_1} - y\vec{f_2}||^2 &= ||\vec{g}||^2 - 2(\vec{g}, x\vec{f_1} + y\vec{f_2}) + ||x\vec{f_1} + y\vec{f_2}||^2 \\ &= ||\vec{g}||^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f_1}) - 2y(\vec{g}, \vec{f_2}) + x^2 + y^2 \\ &= ||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f_1}) - 2y(\vec{g}, \vec{f_2}) \end{aligned}$$

注意 さらに

$$\begin{aligned} &||\vec{g}||^2 + x^2 + y^2 - 2x(\vec{g}, \vec{f_1}) - 2y(\vec{g}, \vec{f_2}) \\ &= \Big(x - (\vec{g}, \vec{f_1})\Big)^2 + \Big(y - (\vec{g}, \vec{f_2})\Big)^2 + ||\vec{g}||^2 - (\vec{g}, \vec{f_1})^2 - (\vec{g}, \vec{f_2})^2 \end{aligned}$$

から $||\vec{g}-x\vec{f_1}-y\vec{f_2}||^2$ は $x=(\vec{g},\vec{f_1}), y=(\vec{g},\vec{f_2})$ において最小値 $||\vec{g}||^2-(\vec{g},\vec{f_1})^2-(\vec{g},\vec{f_2})^2||$ をとることが分かります.

IV

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases}$$

を満たす (x,y,z) に対してクラメールの公式を用いて x,y を z で表しましょう.

解答

$$\begin{cases} x+y &= z+1 \\ 2x-y &= -z-1 \end{cases}$$

をクラメールの公式を用いて x,y について解くと

$$x=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}\cdot\begin{vmatrix}z+1 & 1\\ -z-1 & -1\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\cdot 0$$

$$y=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}\cdot\begin{vmatrix}1 & z+1\\ 2 & -z-1\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}(-3z-3)=z+1$$

V

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\4\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

に対して $||\vec{a}-t\vec{b}||^2$ を最小にする t を求めましょう.

解答

$$||\vec{a}||^2=1+4+9+16=30,\quad (\vec{a},\vec{b}=1+(-2))+3+4=6,\quad ||\vec{b}||^2=1+1+1+1=4$$

となります.

$$\begin{aligned}||\vec{a}-t\vec{b}||^2 &= ||\vec{a}||^2-2t(\vec{a},\vec{b})+t^2||\vec{b}||^2\\ &= 4t^2-12t+30\\ &= 4\left(t-\frac{3}{2}\right)+30-9=4\left(t-\frac{3}{2}\right)+21\end{aligned}$$

から

$$t = \frac{3}{2} \quad \text{のとき最小値} \quad 21$$

をとります.

VI

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とします.

(1) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ であることを示しましょう.

(2) $||\vec{g} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2$ を最小にする x, y を求めましょう.

解答 (1)

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 0$$

(2)

$$\begin{aligned}
||\vec{g} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2 &= ||\vec{g}||^2 - 2(\vec{g}, x\vec{a} + y\vec{b}) + ||x\vec{a} + y\vec{b}||^2 \\
&= ||\vec{g}||^2 - 2(\vec{g}, x\vec{a} + y\vec{b}) + x^2||\vec{a}||^2 + y^2||\vec{b}||^2 \\
&= 1 - 2x + 2y + 3x^2 + 6y^2 \\
&= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\
&= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(y + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

において最後の等号成立条件は $x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{6}$ であるので $||\vec{g} - x\vec{a} - \vec{b}||^2$ は

$$x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{6} \quad \text{のとき} \quad \text{最小値}\frac{1}{2}$$

をとります.

問題 VII については教科書の 3.3.2 節（65 ページ付近）を読んでください.

VIII $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^3$ とします．このとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},\ \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

とします．このとき

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

さらに $\vec{a} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{a}$ から $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ が従います．

$$\begin{aligned}
(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 \\ a_3 + b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}
\end{aligned}$$

IX
直線 ℓ_1

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 3x-2y+z+5=0 \end{cases}$$

直線 ℓ_2

$$\begin{cases} x-z+1=0 \\ 3x+2y-z+2=0 \end{cases}$$

があります．原点を通り直線 ℓ_1, ℓ_2 に交わる直線を求めましょう．

解答直線 ℓ_1 と原点を含む平面 π_1 は

$$5(x+y+z+1)-(3x-2y+z+5)=0 \quad \text{すなわち} \quad 2x+7y+4z=0 \tag{1}$$

他方，直線 ℓ_2 と原点を含む平面 π_2 は

$$2(x-z+1)-(3x+2y-z+2)=0 \quad \text{すなわち} \quad -x-2y-z=0 \tag{2}$$

であることが分かります．π_1 と π_2 の交わりは (1) かつ (2) を解いて

$$x=\frac{1}{3}z, \quad y=-\frac{2}{3}z \tag{3}$$

となる．この直線を ℓ とすると，ℓ が求める直線である．実際 ℓ_1 の方向ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

と ℓ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は π_1 に平行で

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が成立しますから π_1 中 ℓ_1 と ℓ は交わります．他方，ℓ_2 の方向ベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

と ℓ の方向ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は π_2 に平行で

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が成立しますから π_2 中 ℓ_2 と ℓ は交わります．よって ℓ は原点を通り，ℓ_1 と ℓ_2 と交わります.

X 次の 3 点を通る平面の方程式を求めましょう.
(1) $(0,0,0)$, $(1,2,3)$, $(4,5,6)$
(2) $(2,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,4)$
(3) $(1,2,3)$, $(-1,-1,0)$, $(2,-3,5)$

解答 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から原点を通り法線ベクトルが $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ であるので，求める平面の方程式は

$$x - 2y + z = 0$$

であることが分かります.
(2)

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$

は平面を表して，与えられた 3 点を通るので，これが求める方程式となります.
(3)

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

から平面の法線ベクトルは $\left(\begin{smallmatrix} -21 \\ 1 \\ 13 \end{smallmatrix}\right)$ であることが分かります．これから求める平面の方程式は

$$-21(x-1) + (y-2) + 13(z-3) = 0$$

となります.

XI $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします．平面

$$ax + by + cz + q = 0$$

と点 (x_0, y_0, z_0) の距離 δ は

$$\delta = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + q|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

となることを示しましょう.

解答 $\mathrm{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り方向ベクトルが $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の直線 ℓ と平面

$$\pi: \ ax + by + cz + q = 0 \tag{1}$$

の交点 P_1 の座標を求めます．直線 ℓ の上の点の座標は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + at \\ y_0 + bt \\ z_0 + ct \end{pmatrix}$$

となりますから，(1) に代入して

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + q = 0$$

から

$$t = -\frac{az_0 + by_0 + cz_0 + q}{a^2 + b^2 + c^2} \tag{3.18}$$

であることが分かります．さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

なので

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}\right| = |t|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + q|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

であることが分かります.

2018 年 4 月 13 日小テスト解答

I 座標空間の点 $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ が

$$\begin{cases} x - y + z = 1 & (1) \\ x - 3y + 2z = -1 & (2) \end{cases}$$

を満たすとき x, y を z で表しましょう．クラメールの公式を用いましょう．

解答 (1) かつ (2) を

$$\begin{cases} x - y = 1 - z & (1)' \\ x - 3y = -1 - 2z & (2)' \end{cases}$$

と x と y の連立 1 次方程式とみなします．$\left|\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right| = -2 \neq 0$ であるので，これをクラメールの公式で解くと

$$x = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ -1-2z & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\{(1-z)(-3) - (-1-2z)(-1)\} = -\frac{1}{2}(z-4)$$

$$y = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & -1-2z \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\{1\cdot(-1-2z) - 1\cdot(1-z)\} = \frac{1}{2}(z+2)$$

と x, y を z で表すことができます．
注意問題の条件を満たす (x, y, z) を考えます．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(z-4) \\ \frac{1}{2}(z+2) \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

から，条件を満たす点の集合が方向ベクトル $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ で $(2, 1, 0)$ を通る直線であることが分かります．このことについて講義でさらに深めます．

II 写像

$$f: \ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (x + y, xy)$$

を考えます．$f(\mathbf{R}^2)$ と

$$A := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; \ x > 0, y > 0\}$$

に対して $f(A)$ を図示しましょう．

解答　（図は省略します.）

$$\begin{aligned}(a,b)\in f(\mathbf{R}^2) &\Leftrightarrow \exists(x,y)\in\mathbf{R}^2\ \ (x+y=a\wedge xy=b)\\ &\Leftrightarrow t \text{ の 2 次方程式 } t^2-at+b=0 \text{ が 2 実根を持つ}\\ &\Leftrightarrow a^2-4b\geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a,b)\in f(A) &\Leftrightarrow \exists(x,y)\in A\ \ (x+y=a\wedge xy=b)\\ &\Leftrightarrow \exists(x,y)\in A\ \ (x+y=a\wedge xy=b)\\ &\Leftrightarrow t \text{ の 2 次方程式 } t^2-at+b=0 \text{ が 2 正根を持つ}\\ &\Leftrightarrow a^2-4b\geq 0\wedge a>0\wedge b>0\end{aligned}$$

注意 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ に対して

$$\alpha,\beta>0\ \Leftrightarrow \alpha+\beta>0\wedge\alpha\beta>0$$

に注意しましょう．できたら証明してみましょう．

補足問題 $a\neq 0$ を満たす $a,b\in\mathbf{R}$ を考えます．写像

$$f:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}\quad x\mapsto ax+b$$

が全射でありかつ単射であることを示しましょう（このとき f は全単射であるといいます）．

解答 任意の実数 $y\in\mathbf{R}$ をとります．$a\neq 0$ であるので

$$y=ax+b\ \Leftrightarrow x=\frac{1}{a}(y-b)$$

であることが分かります．これから

$$f(\frac{1}{a}(y-b))=y$$

であることが分かりますから f は全射です．次に任意の $x,x'\in\mathbf{R}$ が

$$f(x)=f(x')$$

を満たすとします．これは

$$ax+b=ax'+b\quad\text{すなわち}\quad ax=ax'$$

を意味します．さらにこの両辺に $\frac{1}{a}$ を掛けると $x=x'$ が従います．よって f は単射であることが分かりました.

2018年4月20日小テスト解答

以下のベクトルの外積を求めましょう.
(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

II 3 点 $(1,1,1)$, $(2,0,-1)$, $(2,1,3)$ を通る平面の方程式を求めましょう.

解答　A$(1,1,1)$, B$(2,0,-1)$, C$(2,1,3)$ と 3 点に名前を付けると

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となりますから，求める平面の法線ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります．点 A を通る形で平面の方程式を求めると

$$-2(x-1) - 4(y-1) + (z-1) = 0$$

となります.

3.5　3 次の行列式（補足）

3.5.1　列に関する基本性質

この余因子展開を用いると行列式の列に関する基本的な性質をいくつか導くことができます.

(I) (各列に関する線型性) 例えば 1 列に関して

$$\begin{vmatrix} \lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{\alpha} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vec{\beta} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

が成立します.

この性質は 2 次正方行列の性質と同様に証明できます．そのためには次の補助定理 3.1 を用います.

補助定理 3.1. $F:\ \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \quad \vec{x} \mapsto a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$ は

$$F(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$$

を満たします.

演習 3.4. 補助定理 *3.1* を証明して，(3.19) を示しましょう.

(II) (交代性) 相異なる 2 列を交換すると行列式の値は (-1) 倍されます．例えば

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} \tag{3.20}$$

が成立します.

2 次正方行列に対する行列式の交代性を用いて，(3.20) を証明します．実際

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} &= c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= -c_1\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - c_3\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{c} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

と証明されます.

最後に次の性質 **(III)** は具体的に計算すれば示せます.

(III) **(正規性)** 単位行列 I_3 の行列式は

$$|I_3| = 1$$

となります.

基本性質から導かれる性質　以上の (I), (II), (III) が行列式の基本的な性質です. これからいくつかの性質を導くことができます.

(IV) 異なる 2 列が等しいとき行列式の値は 0 となります. 例えば

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.21}$$

が成立します.

この場合は 1 列と 2 列を交換すると性質 **(II)** から

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix}$$

が得られることから, (3.21) が従います.

(V) $i \neq j$ のとき j 列に i 列の λ 倍を加えても行列式の値は変わりません. 例えば

$$|\ \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\ | = |\ \vec{a} \quad (\vec{b} + \lambda\vec{a}) \quad \vec{c}\ |$$

が成立します.

これは

$$（右辺）= |\ \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\ | + \lambda|\ \vec{a} \quad \vec{a} \quad \vec{c}\ | = |\ \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\ |$$

から従います.

3.5.2　行の基本性質

3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ の転置行列の行列式

$$\det({}^tA) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

を考えます．具体的に計算すると

$$\det({}^tA) = \det(A) \quad \text{すなわち} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

を得ます．以上で次の定理 3.7 を示しました．

定理 3.7. $A \in M_3(\mathbf{R})$ に対して

$$\det({}^tA) = \det(A) \tag{3.22}$$

が成立します．

これを用いると行に関する余因子展開を導くことができます．

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

とすると以下が示せます．

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

定理 3.7 を用いると，列に関して今まで説明した性質が行の性質についても成立することを示せます．すなわち以下の性質が成立します．

(I)（行に関する線型性）　行列式は各行において線型です．例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

が 2 行の線型性として成立します．

これは転置をしても行列式の値が変わらないことと列に関する線型性を用いると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}) & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & \lambda{}^t\boldsymbol{x}+\mu{}^t\boldsymbol{y} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} \\ &= \lambda \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{x} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{y} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

と証明できます．

(II)（交代性）　相異なる 2 行を交換すると行列式の値は (-1) 倍されます．例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

が成立します．

これは転置をしても行列式の値が変わらないことと列に関する交代性を用いると

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{b} & {}^t\boldsymbol{c} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} {}^t\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{c} & {}^t\boldsymbol{b} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

と証明されます．

以上で説明した行に関する性質 **(I)** と **(II)** を用いると次の性質 **(IV)** と性質 **(II)'**，性質 **(V)** が従います．これらは，列に関する同様の性質を導いたのと同様に示すことができます．

(IV) 相異なる 2 行が等しい行列式の値は 0 です．

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix} = 0$$

(V) $i \neq j$ のとき i 行の λ 倍を j 行に加えても行列式の値は変わりません．例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}+\lambda\boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

が成立します．

行列式の具体的な計算方法として，行に関する性質 **(V)** と性質 **(II)** を用いて 1 列の成分が 1 行以外 0 となるように行基本変形するやり方があります．これは定理 3.7 の証明の中でも使ったアイデアですが，加えて余因子展開を用いると 2 次の行列式を計算することに持ち込むことができます．例えば

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2(2\cdot 6 - 2\cdot 3) = -12$$

と計算されます．最後に 3 次から 2 次になっているところは 1 列の余因子展開を用いました．

演習 3.5. 次の行列式の値を求めましょう．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 　*(2)* $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ 　*(3)* $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ 　*(4)* $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

3.5.3　クラメールの公式

次に x, y, z に関する 3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= \alpha_1 & \cdots(1) \\ a_2x + b_2y + c_2z &= \alpha_2 & \cdots(2) \\ a_3x + b_3y + c_3z &= \alpha_3 & \cdots(3) \end{cases}$$

を考えます．2 元連立方程式に帰着させるために，z を消去します．そのために $(1)\times c_2 - (2)\times c_1$ を考えると

$$\begin{array}{rcll} & a_1c_2x + b_1c_2y & = \alpha_1c_2 & \cdots(1)\times c_2 \\ -) & a_2c_1x + b_2c_1y & = \alpha_2c_1 & \cdots(2)\times c_1 \\ \hline & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y & = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} & \cdots(\mathrm{I}) = (1)\times c_2 - (2)\times c_1 \end{array}$$

を得ます．同様に $(1)\times c_2 - (3)\times c_1$ と $(2)\times c_3 - (3)\times c_2$ を考えると

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots(\mathrm{II}) = (1)\times c_3 - (3)\times c_1$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{III}) = (2) \times c_3 - (3) \times c_2$$

を得ることができます．

$-b_1 \times (\mathrm{III}) + b_2 \times (\mathrm{II}) - b_3 \times (\mathrm{I})$ を 2 列の余因子展開を用いて計算すると

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

が従います．ここで

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{3.23}$$

より

$$Dx = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \left(\text{ただし} D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)$$

が得られます．したがって $D \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

が得られました．y と z についても同様な解の公式があり，次の定理 3.8 が証明できます．

定理 3.8.（クラメールの公式） $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ のとき連立 1 次方程式 *(1),(2),(3)* の解は

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

で与えられます．

演習 3.6. $a_1 \times$ *(III)* $- a_2 \times$ *(II)* $+ a_3 \times$ *(I)* を計算して定理 *3.8* の y の公式を導いてください．

演習 3.7. 次の連立 1 次方程式をクラメーの公式を用いて解きましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.5.4　クラメールの公式 (2)

列の余因子展開　$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ に対して余因子展開

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

が成立します．$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ と (i,j) 成分を a_{ij} と表すと

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となります．ここで A から i 行と j 列を除いた 2 次正方行列を A_{ij} として，さらに (i,j) 余因子を

$$\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

と定めます．このとき上の余因子展開は

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}\tilde{A}_{11} + a_{21}\tilde{A}_{21} + a_{31}\tilde{A}_{31} \\ &= a_{12}\tilde{A}_{12} + a_{22}\tilde{A}_{22} + a_{32}\tilde{A}_{32} \\ &= a_{13}\tilde{A}_{13} + a_{23}\tilde{A}_{23} + a_{33}\tilde{A}_{33} \end{aligned}$$

と表すことができます．これを $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ すなわち A の各列を用いて表すと

$$\begin{aligned}|A| &= (\tilde{A}_{11}\ \tilde{A}_{21}\ \tilde{A}_{31})\vec{a}_1 \\ &= (\tilde{A}_{12}\ \tilde{A}_{22}\ \tilde{A}_{32})\vec{a}_2 \\ &= (\tilde{A}_{13}\ \tilde{A}_{23}\ \tilde{A}_{33})\vec{a}_3\end{aligned}$$

となります．ここで A の余因子行列を

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33}\end{pmatrix}$$

と定義すると

$$\tilde{A}A = \begin{pmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33}\end{pmatrix}(\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) = \begin{pmatrix}|A| & * & * \\ * & |A| & * \\ * & * & |A|\end{pmatrix} \tag{3.24}$$

であることが分かります．この式の最右辺にある $*$ の成分は 0 となります．例えば A の第 1 列を第 2 列に置き換えて第 1 列で余因子展開すると

$$\begin{aligned}0 = \begin{vmatrix}a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} &= a_{12}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} \\ &= a_{12}\tilde{A}_{11} + a_{22}\tilde{A}_{21} + a_{32}\tilde{A}_{31} \\ &= \left(\tilde{A}_{11}\quad \tilde{A}_{21}\quad \tilde{A}_{31}\right)\vec{a}_2\end{aligned}$$

から $\tilde{A}A$ の $(1,2)$ 成分の $*$ が 0 となることが示せます．以上で次の定理を示しました．

定理 3.9.

$$\tilde{A}A = |A| \cdot I_3$$

行の余因子展開　$A = \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$ の行列式は $|A| = |{}^tA|$ が成立することを用いて

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} \\ &= a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix}b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2\end{vmatrix} \\ &= a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix}b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\end{aligned}$$

この式では転置行列の第 1 列で展開しましたが，同様に転置行列の第 2 列，第 3 列で展開すると

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

と各行の余因子展開が成立することが分かります．各列の余因子展開を A の (i,j) 成分 $A = (a_{ij})$ と余因子 $\tilde{A}_{ij}$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\tilde{A}_{11} + a_{12}\tilde{A}_{12} + a_{13}\tilde{A}_{13} \\ &= a_{21}\tilde{A}_{21} + a_{22}\tilde{A}_{22} + a_{23}\tilde{A}_{23} \\ &= a_{31}\tilde{A}_{31} + a_{32}\tilde{A}_{32} + a_{33}\tilde{A}_{33}\end{aligned}$$

できます．これを $\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2$，$\mathbf{a}_3$ と A の各行を用いて表すと

$$|A| = \mathbf{a}_1 \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} \\ \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{13} \end{pmatrix} = \mathbf{a}_2 \begin{pmatrix} \tilde{A}_{21} \\ \tilde{A}_{22} \\ \tilde{A}_{23} \end{pmatrix} = \mathbf{a}_3 \begin{pmatrix} \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{33} \end{pmatrix}$$

と表現できます．これから

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & * & * \\ * & |A| & * \\ * & * & |A| \end{pmatrix}$$

となります．この式の最右辺の非対角成分は 0 となります．例えば A の第 2 行を第 3 行に置き換えた行列の行列式を第 2 行で展開すると

$$\begin{aligned}0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= -a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{31}\tilde{A}_{21} + a_{32}\tilde{A}_{22} + a_{33}\tilde{A}_{23} \\ &= \mathbf{a}_3 \begin{pmatrix} \tilde{A}_{21} \\ \tilde{A}_{22} \\ \tilde{A}_{23} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

から $(3,2)$ 成分の $*$ が 0 であることが分かります.

以上で次の定理を示しました.

定理 3.10.

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A| \cdot I_3$$

この定理を用いると次の定理を示すことができます.

定理 3.11. $|A| \neq 0$ ならば A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

となります.

3.5.5 行列の積と行列式

演習問題解答

演習 3.2

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

に対して，以下を求めましょう．
(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積.
(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交する単位ベクトル.
(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}, \vec{c}$ が張る平行六面体の体積.

解答 (1)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となりますから $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積 S は

$$S = ||\vec{a} \times \vec{b}|| = \sqrt{3}$$

(2) $\vec{a} \times \vec{b}$ が $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直ですから，大きさを 1 にした

$$\pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が求める単位ベクトルです.
(3) 求める体積を V にすると

$$V = abs \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \right)$$

となります．他方

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

から $V = 4$ であることが分かります.

演習 3.3

$$||\vec{x} \pm \vec{y}||^2 = ||\vec{x}||^2 \pm 2(\vec{x}, \vec{y}) + ||\vec{y}||^2 \tag{3.26}$$

を示しましょう.

解答

$$\begin{aligned}
||\vec{x} + \vec{y}||^2 &= (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \quad ((3.27)\text{ から}) \\
&= (\vec{x}, \vec{x} + \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) \quad ((3.10)\text{ から}) \\
&= (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{y}, \vec{y}) \quad ((3.11)\text{ から}) \\
&= (\vec{x}, \vec{x}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \quad ((3.12)\text{ から}) \\
&= ||\vec{x}||^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}) + ||\vec{y}||^2 \quad ((3.13)\text{ から})
\end{aligned}$$

ここで $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$||\vec{x}||^2 = (\vec{x}, \vec{x}) \tag{3.27}$$

が成立することを用いています.

演習 3.4 以下の補助定理を用いて

$$\left| \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \right| = \lambda \left| \vec{\alpha} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \right| + \mu \left| \vec{\beta} \quad \vec{b} \quad \vec{c} \right| \tag{3.28}$$

を示しましょう.

補助定理 $F: \ \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \quad \vec{x} \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ は

$$F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$$

を満たします.

解答

$$|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

が成立しますから

$$F(\vec{x}) = |\vec{x}\ \vec{b}\ \vec{c}|$$

と定めると

$$C_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad C_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad C_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

に対して

$$F(\vec{x}) = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3$$

となります．従って補助定理から

$$\begin{aligned}|\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}\ \vec{b}\ \vec{c}| &= F(\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta}) \\ &= \lambda F(\vec{\alpha}) + \mu F(\vec{\beta}) \\ &= \lambda|\vec{\alpha}\ \vec{b}\ \vec{c}| + \mu|\vec{\beta}\ \vec{b}\ \vec{c}|\end{aligned}$$

となります．

演習 3.5 次の行列式の値を求めましょう.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ **(3)** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ **(4)** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -12 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -12 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

(4)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)((c+a)-(b+a)) \\ &= (a-b)(c-a)(b-c) \end{aligned}$$

演習 3.6

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{I}) = (1) \times c_2 - (2) \times c_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{II}) = (1) \times c_3 - (3) \times c_1$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \cdots (\mathrm{III}) = (2) \times c_3 - (3) \times c_2$$

において $a_1 \times (III) - a_2 \times (II) + a_3 \times (I)$ を計算して，クラメールの公式の y の公式を導きましょう.

解答

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \cdots (\mathrm{I})$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots (\mathrm{II})$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots (\mathrm{III})$$

において $a_1 \times (\mathrm{III}) - a_2 \times (\mathrm{II}) + a_3 \times (\mathrm{I})$ を計算すると

$$\begin{aligned} &\left(-a_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) x \\ &\quad + \left(-a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) y \\ &= -a_3 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} + a_2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_1 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となりますが，第 2 列の余因子展開と考えると

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_1 & c_1 \\ \alpha_2 & a_2 & c_2 \\ \alpha_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

から

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

となります．これから $|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}| \neq 0$ を用いて

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

が導けます．

演習 3.7 次の連立 1 次方程式をクラメールの公式を用いて解きましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

からクラメールの公式を適用できて

$$x = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 7 & -13 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = -\frac{49}{10}$$

$$y = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\cdot(-1)\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$$z = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

からクラメールの公式を適用できて,

$$x = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -13 \end{vmatrix} = -\frac{13}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6$$

$$z = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

追加演習問題および解答

I（教科書 26p. 演習 1.29 の拡張）
次の $\vec{a},\vec{b}\in\mathbf{R}^n$ に対して

$$L=\{x\vec{a}+y\vec{b};\ x,y\in\mathbf{R}\}$$

を考えます．条件

$$||\vec{p}||=||\vec{q}||=1,\ (\vec{p},\vec{q})=0$$

を満たす $\vec{p},\vec{q}\in L$ を求めましょう．

(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

(3) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$ **(4)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$

解答 **(1)** $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}=\frac{2}{3}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p}=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}(\vec{b}-\vec{w})=\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります．
(2) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p}=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}(\vec{b}-\vec{w})=\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります．

(3) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}=-\frac{1}{4}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b}-\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\3\end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p}=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}(\vec{b}-\vec{w})=\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\3\end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります．

(4) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w}=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}=\frac{2}{4}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b}-\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b}-\vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p}=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}(\vec{b}-\vec{w})=\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$$

が L の正規直交基底となります．

II（I の続き）I の $\vec{p},\vec{q}$ を用いて

$$||\vec{c}-x\vec{a}-y\vec{b}||^2$$

を最小にする $x,y\in\mathbf{R}$ を求めましょう．

(1) $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$　**(2)** $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$　**(3)** $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$　**(4)** $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

解答　$\vec{p},\vec{q}$ と $\vec{a},\vec{b}$ の間に関係

$$\begin{aligned}\vec{p}&=\frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a}\\ \vec{q}&=\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}\left(\vec{b}-\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\vec{a}\right)\end{aligned}$$

があることに注意しましょう．従って

$$(\vec{p}\ \vec{q})=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}\frac{1}{||\vec{a}||} & -\frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}\cdot\frac{(\vec{a},\vec{b})}{||\vec{a}||^2}\\ 0 & \frac{1}{||\vec{b}-\vec{w}||}\end{pmatrix}$$

が成立します．この等式の右辺に現れる行列を S とすると S は正則となります．

$$\begin{aligned}\xi\vec{p}+\eta\vec{q}=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}&=(\vec{a}\ \vec{b})S\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\\ &=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

から

$$S\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\quad 従って\quad \begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=S^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

が成立します．以上から任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して一意的に $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ が存在して

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q}$$

が成立します．以下ではこのことを用います．すなわち

$$\begin{aligned} ||\vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b}||^2 &= ||\vec{c} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}||^2 \\ &= ||\vec{c}||^2 + \xi^2||\vec{p}||^2 + \eta^2||\vec{q}||^2 - 2\xi(\vec{c},\vec{p}) - 2\eta(\vec{c},\vec{q}) \\ &= ||\vec{c}||^2 + \xi^2 - 2\xi(\vec{c},\vec{p}) + +\eta^2||\vec{q}||^2 - 2\eta(\vec{c},\vec{q}) \\ &= (\xi - (\vec{c},\vec{p}))^2 + (\eta - (\vec{c},\vec{q}))^2 + ||\vec{c}||^2 - (\vec{c},\vec{p})^2 - (\vec{c},\vec{q})^2 \end{aligned}$$

から

$$\xi = (\vec{c},\vec{p}), \quad \eta = (\vec{c},\vec{q})$$

のとき $||\vec{x} - \xi\vec{p} - \eta\vec{q}||^2$ は最小となります．

(1)

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

であることが I で示されています．これから

$$\xi = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}\right) = -\frac{5}{\sqrt{42}}$$

のとき最小値をとることが分かります．このとき

$$\begin{aligned} &x\vec{a} + y\vec{b} = \xi\vec{p} + \eta\vec{q} \\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{\sqrt{42}} \cdot \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{2}{14} \\ 1 & 1 & \frac{3}{14} \\ 1 & -1 & -\frac{13}{14} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{2}{14} \\ 0 & -1 & \frac{5}{14} \\ 0 & -3 & \frac{15}{14} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -\frac{2}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{14} \\ 0 & -3 & \frac{15}{14} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{8}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{14} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

から

$$x = \frac{4}{7}, \quad y = -\frac{5}{14}$$

であることが分かります.

注意 $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{3}{\sqrt{42}}\cdot\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{42}}\\ 0 & \frac{3}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{5}{\sqrt{42}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\\ -\frac{5}{14}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます.

(2)

$$\vec{p}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$$

であることが I で示されています．これから

$$\xi=\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \eta=\left(\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 3\end{pmatrix}\right)=\frac{3}{\sqrt{34}}$$

のとき最小値をとることが分かります．このとき

$$\begin{aligned}x\vec{a}+y\vec{b}&=\xi\vec{p}+\eta\vec{q}\\ &=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-4\\ 6\\ 13\end{pmatrix}\end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -\frac{4}{17}\\ 0 & 2 & \frac{6}{17}\\ -1 & 1 & \frac{13}{17}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -\frac{4}{17}\\ 0 & 2 & \frac{6}{17}\\ 0 & 3 & \frac{9}{17}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & -\frac{4}{17}\\ 0 & 1 & \frac{3}{17}\\ 0 & 3 & \frac{9}{17}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -\frac{10}{17}\\ 0 & 1 & \frac{3}{17}\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

から

$$x=-\frac{10}{17},\quad y=\frac{3}{17}$$

であることが分かります.

注意 $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{34}}\cdot\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{34}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{34}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{34}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{3}{\sqrt{34}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{10}{17}\\ \frac{3}{17}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます.

(3)

$$\vec{p}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\3\end{pmatrix}$$

であることがIで示されています．これから

$$\xi=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{2},\quad \eta=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\3\end{pmatrix}\right)=\frac{5}{\sqrt{44}}$$

のとき最小値をとることが分かります．このとき

$$\begin{aligned}x\vec{a}+y\vec{b}&=\xi\vec{p}+\eta\vec{q}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}+\frac{5}{\sqrt{44}}\cdot\frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix}5\\1\\-3\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}9\\4\\-1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&\frac{9}{11}\\1&0&\frac{4}{11}\\1&-1&-\frac{1}{11}\\-1&1&\frac{1}{11}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}0&1&\frac{5}{11}\\1&0&\frac{4}{11}\\0&1&\frac{5}{11}\\0&-1&-\frac{5}{11}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&\frac{4}{11}\\0&1&\frac{5}{11}\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right)$$

から

$$x=\frac{4}{11},\quad y=\frac{5}{11}$$

であることが分かります．

注意 $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{4}{\sqrt{44}}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\\0&\frac{4}{\sqrt{44}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{44}}\\0&\frac{4}{\sqrt{44}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{\sqrt{44}}\\0&\frac{4}{\sqrt{44}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{\sqrt{44}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{11}\\\frac{5}{11}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます．

(4)

$$\vec{p}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}$$

であることが I で示されています．これから

$$\xi = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \eta = \left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{3}{\sqrt{20}}$$

のとき最小値をとることが分かります．このとき

$$\begin{aligned} x\vec{a} + y\vec{b} &= \xi\vec{p} + \eta\vec{q} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{20}}\cdot\frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\\7\end{pmatrix} \end{aligned}$$

を直接 x と y について解くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{10} \\ 1 & 0 & -\frac{4}{10} \\ 1 & 2 & \frac{2}{10} \\ -1 & 1 & \frac{7}{10} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 1 & 0 & -\frac{4}{10} \\ 0 & 2 & \frac{6}{10} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{10} \\ 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

から

$$x = -\frac{4}{10}, \quad y = \frac{3}{10}$$

であることが分かります．

注意 $S = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{2}{\sqrt{20}}\cdot\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}$ を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{20}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{20}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{3}{\sqrt{20}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{4}{10}\\ \frac{3}{10}\end{pmatrix}$$

とも計算ができます．

III $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ が平行でないとします。このとき

$$\vec{x} \not\parallel \lambda\vec{x} + \vec{y}, \quad \vec{x} + \vec{y} \not\parallel \vec{x} - \vec{y}$$

であることを示しましょう．

解答

$$c_1\vec{x} + c_2(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = (c_1 + \lambda c_2)\vec{x} + c_2\vec{y} = \vec{0}$$

とします．このとき $\vec{x} \nparallel \vec{y}$ から

$$\begin{cases} c_1 + \lambda c_2 = 0 \\ \qquad c_2 = 0 \end{cases}$$

が従います．ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

に注意すると $c_1 = c_2 = 0$ が従います．従って

$$\vec{x} \nparallel \lambda\vec{x} + \vec{y}$$

であることが分かります．他方

$$c_1(\vec{x}+\vec{y}) + c_2(\vec{x}-\vec{y}) = (c_1+c_2)\vec{x} + (c_1-c_2)\vec{y} = \vec{0}$$

とします．このとき $\vec{x} \nparallel \vec{y}$ から

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

が従います．ここで

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

に注意すると $c_1 = c_2 = 0$ が従います．従って

$$\vec{x}+\vec{y} \nparallel \vec{x}-\vec{y}$$

であることが分かります．

IV $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ は平行でないとします：

$$\vec{a} \nparallel \vec{b}$$

このとき

$$\vec{\alpha} = x\vec{a} + y\vec{b}, \quad \vec{\beta} = z\vec{a} + w\vec{b}$$

とするとき

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix} \neq 0$$

が成立することを示しましょう．

解答

$$\begin{aligned} c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} &= c_1(x\vec{a}+y\vec{b}) + c_2(z\vec{a}+w\vec{b}) \\ &= (xc_1+zc_2)\vec{a} + (yc_1+wc_2)\vec{b} = \vec{0} \end{aligned}$$

とします．$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から

$$\begin{cases} xc_1 + zc_2 &= 0 \\ yc_1 + wc_2 &= 0 \end{cases} \tag{\#}$$

が従います．

ここで $\left|\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ ならば (#) から $c_1 = c_2 = 0$ が導けますから

$$\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$$

が従います．他方

$$\left|\begin{smallmatrix} x & z \\ y & w \end{smallmatrix}\right| = 0$$

ならば (#) を満たす $c_1, c_2 \in \mathbf{K}$ で $c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$ を満たすものが存在して

$$c_1\vec{\alpha} + c_2\vec{\beta} = \vec{0}$$

が成立します．これは

$$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$$

を意味します．