写像の練習問題

I

(1) <u>fについて</u>　$f(1)=f(3)=3$なので　fは単射でない．

$f(i)=4$である　$i\in\{1,2,3,4,5\}$が存在しないので

全射でない．

<u>gについて</u>　$g(2)=g(3)=1$なので　gは単射でない．

$g(i)=5$である　$i\in\{1,2,3,4,5\}$が存在しないので

全射でない．

(2)

$$\left.\begin{aligned} f\circ g(1)&=f(4)=1\\ f\circ g(2)&=f(1)=3\\ f\circ g(3)&=f(1)=3\\ f\circ g(4)&=f(2)=5\\ f\circ g(5)&=f(3)=3 \end{aligned}\right\}\text{から}\quad f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&3&5&3\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} g\circ f(1)&=g(3)=1\\ g\circ f(2)&=g(5)=3\\ g\circ f(3)&=g(3)=1\\ g\circ f(4)&=g(1)=4\\ g\circ f(5)&=g(2)=1 \end{aligned}\right\}\text{から}\quad g\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&1&4&1\end{pmatrix}$$

(3)

$f(\{1,2,3,4,5\})=\{1,2,3,5\}$

$g(\{1,2,3,4,5\})=\{1,2,3,4\}$

注　1° Xが有限集合，$f:X\to X$について　f:単射 $\Longleftrightarrow$ f:全射

2° (3)からも f,gが全射でないことが分かる．

II

$$f\circ g(x) = f(x^2-2) = 2(x^2-2)+1 = 2x^2-3$$

$$g\circ f(x) = g(2x+1) = (2x+1)^2-2 = 4x^2+4x-3$$

III 一般に $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ に対して

(a) f, g: 全射 $\Longrightarrow$ $g\circ f$: 全射

(b) f, g: 単射 $\Longrightarrow$ $g\circ f$: 単射

が成立する. (a)は ($\forall z \in Z$ に対して $\exists y \in Y$ $g(y)=z$) が g の全射から従う. 次に f の全射性から $\exists x \in X$ $f(x)=y$. が従うので $z = g(y) = g(f(x)) = g\circ f(x)$. よって $g\circ f$ は全射

(b)は $x, x' \in X$ に対して $g\circ f(x) = g\circ f(x')$ すなわち $g(f(x)) = g(f(x'))$. g の単射性から $f(x) = f(x')$. さらに f が単射なので $x = x'$ が従う.

これらを用いる.

$g\circ f$ は f, g が全単射 従って単射なので単射

$g\circ f$ は f, g が全単射 従って全射なので全射

次に $g\circ f\circ f^{-1}\circ g^{-1} = g\circ id_Y\circ g^{-1} = g\circ g^{-1} = id_Z$

$f^{-1}\circ g^{-1}\circ g\circ f = f^{-1}\circ id_Y\circ f = f^{-1}\circ f = id_X$

で, 逆写像の一意性から $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$ がわかる.

IV <u>well-defined</u> $x \neq 3$ のとき $\frac{x-1}{x-3}$ は定義できる.

$\frac{x-1}{x-3} = 1$ ならば $x-1 = x-3$ i.e. $-1 = -3$ となるので $\frac{x-1}{x-3} = 1$

を満たす $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ は存在しない.

<u>全射</u> $y \neq 1$ とする. $y = \frac{x-1}{x-3}$ を満たす $x \neq 3$ が存在

することを示す.

$$y = \frac{x-1}{x-3} \text{ かつ } x \neq 3 \iff y(x-3) = x-1 \text{ かつ } x \neq 3$$

$$\iff xy - 3y = x-1 \text{ かつ } x \neq 3$$

$$\iff x(y-1) = 3y-1 \text{ かつ } x \neq 3$$

$$\underset{y \neq 1}{\iff} x = \frac{3y-1}{y-1} \text{ かつ } x \neq 3$$

から示せた.

<u>単射</u> $x, x' \neq 3$ のとき $\frac{x-1}{x-3} = \frac{x'-1}{x'-3}$ とする. ㊍

$$㊍ \iff \frac{x-3+2}{x-3} = \frac{x'-3+2}{x'-3} \iff 1 + \frac{2}{x-3} = 1 + \frac{2}{x'-3}$$

$$\iff \frac{2}{x-3} = \frac{2}{x'-3} \underset{x, x' \neq 3}{\iff} x'-3 = x-3 \iff x' = x$$

から分かる.

(注) $\frac{x-1}{x-3} = \frac{x-3+2}{x-3} = 1 + \frac{2}{x-3}$ は大事な変形である.

V

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

VI

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(辞書式順序)