平均値の定理

Nobuyuki TOSE

Jun 21, 2017

極小値・極大値

定義

$f:\ (A,B)\to\mathbf{R}$ に対して， f が $t=c\in(A,B)$ において極小値 (*minimal value*) を持つとは，ある $\delta>0$ が存在して

$$f(t)\geq f(c)\quad(c-\delta<t<c+\delta).$$

が成立するときです． f が $t=c\in(A,B)$ において極大値 (*miaximal value*) を持つとは, ある $\delta>0$ が存在して

$$f(t)\leq f(c)\quad(c-\delta<t<c+\delta).$$

が成立するときです．

定理（極大・極小の必要条件）

定理

微分可能な関数 $f: (A, B) \to \mathbf{R}$ が $t = c \in (A, B)$ で極小値（極大値）を持つならば

$$f'(c) = 0$$

証明

証明 f が $t=c$ で極小値を持つので, ある $\delta>0$ に対して

$$f(t)\geq f(c)\quad(c-\delta<t<c+\delta).$$

が成立します．この不等式から

$$\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\geq 0\quad(c<t<c+\delta)$$

と

$$\frac{f(t)-f(c)}{t-c}\leq 0\quad(c-\delta<t<c)$$

が従います.

ここで t を右から $t=c$ に近づけると: $t\to c+0$

$$f'(c)\geq 0$$

他方，t を左から $t=c$ に近づけると: $t\to c-0$

$$f'(c)\leq 0$$

Remark

$t = c$ の両側で定義された関数

$$g : (A, B) \setminus \{c\} \to \mathbf{R}$$

に対して

$$\lim_{t \to c} g(t) = \alpha$$

が成立するとします．このとき

$$g(t) \to \alpha \quad (t \to c + 0)$$

and

$$g(t) \to \alpha \quad (t \to c - 0)$$

Rolleの定理

関数 $f:[A,B]\to\mathbf{R}$ が条件

$$f \text{ は } [A,B] \text{ の各点で連続,}$$

かつ

$$f \text{ は } (A,B) \text{ の各点で微分可能である}$$

を満たすとします．さらに $f(A)=f(B)$ が成立するとします．このとき，ある $c\in(A,B)$ に対して

$$f'(c)=0$$

が成立します.

連続関数に関する最大値の定理を適用すると，ある $c_1, c_2 \in [A, B]$ が

$$f(c_1) \leq f(t) \leq f(c_2) \quad (t \in [A, B]) \tag{1}$$

を満たします．特に

$$f(c_1) \leq f(A) = f(B) \leq f(c_2) \tag{2}$$

が成立します．
(I) $f(c_1) = f(A) = f(B)$ かつ $f(A) = f(B) = f(c_2)$ ならば

$$f(t) = f(A) = f(B) \quad (t \in [A, B])$$

と f は $[A, B]$ 上定数となり， $f'(t) = 0$ $(t \in (A, B))$ が従います．

Rolle の定理–証明 (2)

(II) (I) でないとします．このとき

$$f(c_1) < f(A) = f(B) \quad \text{OR} \quad f(A) = f(B) < f(c_2) \tag{3}$$

が成立します.
(II-a) 第一の場合は $A < c_1 < B$, $f'(c_1) = 0$
(II-b) 第二の場合は $A < c_2 < B$, $f'(c_2) = 0$.
ここで極大・極小の必要条件を用いました.

平均値の定理

関数 $f : [A, B] \to \mathbf{R}$ が条件

$$f \text{ は } [A, B] \text{ の各点で連続},$$

かつ

$$f \text{ は } (A, B) \text{ の各点で微分可能である}$$

を満たすとします．このとき，ある $c \in (A, B)$ が

$$f'(c) = \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$$

を満たします．

平均値の定理—証明

関数 $\varphi(t)$ を

$$\varphi(t) := f(t) - \frac{f(B)-f(A)}{B-A}\cdot(t-A)$$

と定義します．このとき Then

$$\varphi(A) = f(A) - \frac{f(B)-f(A)}{B-A}\cdot(A-A) = f(A)$$

かつ

$$\varphi(B) = f(B) - \frac{f(B)-f(A)}{B-A}\cdot(B-A) = f(B) - (f(B)-f(A)) = f($$

が成立しますから Rolle の定理を φ に適用できて，

$$\varphi'(c) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f'(c) - \frac{f(B)-f(A)}{B-A}\cdot 1 = 0$$

を満たす $c \in (A, B)$ が存在することが分かります．

重要な応用

定理

微分可能な関数 $f: (A, B) \to \mathbf{R}$ が

$$f'(t) > 0 \quad (t \in (A, B))$$

を満たすとします．このとき

$$A < s < t < B \Rightarrow f(s) < f(t)$$

が成立します．他方，f が

$$f'(t) < 0 \quad (t \in (A, B))$$

を満たすならば，

$$A < s < t < B \Rightarrow f(s) > f(t)$$

が成立します．