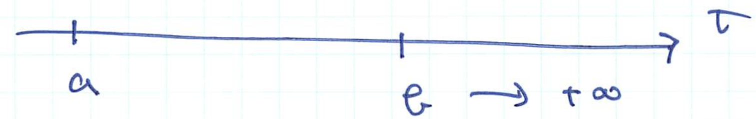
広義積分

$$f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (連続)$$

を考えます.



$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)\,dt$$

が存在するとき f は $[a, +\infty)$ 上広義積分可能であるといいます.

<u>例1</u>

$$\int_1^R \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^R = -\frac{1}{R} + 1 \longrightarrow 1 \quad (R \to +\infty)$$

から

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = 1$$

<u>例2</u>　$\alpha > 1$ とします．

$$\int_1^R \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_1^R = \frac{1}{1-\alpha} (R^{1-\alpha} - 1)$$

$1-\alpha < 0$ なので $R \to +\infty$ のとき $R^{1-\alpha} \to 0$ となります．従って

$$\int_1^R \frac{1}{t^\alpha} dt \to \frac{1}{\alpha - 1}$$

よって

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}$$

<u>$\alpha = 1$ のときは</u>

$$\int_1^R \frac{1}{t} dt = [\log t]_1^R = \log R \to +\infty$$

となりますから　$\frac{1}{t}$ は $[1, +\infty)$ 上広義積分可能ではありません．

4.3.11.3

$$\int_0^R e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^R = 1-e^{-R} \to 1 \quad (R\to+\infty)$$

から

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$$

4.3.11.4

$$\int_0^R t\,e^{-t}\,dt = \int_0^R t\,(-e^{-t})'\,dt = \left[-t\,e^{-t}\right]_0^R + \int_0^R e^{-t}\,dt$$

$$= -Re^{-R} + \int_0^R e^{-t}\,dt$$

$$Re^{-R} = \frac{R}{e^R} \to 0 \quad (R\to+\infty)$$

$$\int_0^R e^{-t}\,dt \to \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$$

から

$$\int_0^R t\,e^{-t}\,dt \to 1 \quad (R\to+\infty)$$

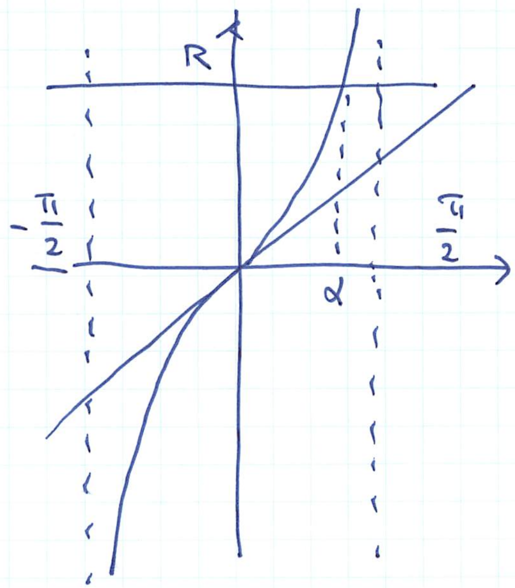
従って

$$\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,dt = 1$$

例15

$$\int_0^R \frac{dx}{1+x^2} \qquad x = \tan\theta \text{ のとき } \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$1 + x^2 = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$



$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\tan\alpha = R$ である α を用いて

$$\int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^\alpha d\theta = \alpha$$

$R \to +\infty$ のとき $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ なので

$$\int_0^R \frac{dx}{1+x^2} \to \frac{\pi}{2}$$

従って

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$