積分 II

微分積分学の基本定理

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V02 Nov 10, 2020 for CalcNT

連続関数の性質 (1)（復習）

開区間 (A, B) 上の関数 $g:\ (A, B) \to \mathbf{R}$ について

Theorem

$g(t)$ が $t = c \in (A, B)$ で連続とします.
(1) $g(c) > 0$ ならば，ある $\delta > 0$ に対して

$$g(t) > 0 \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$

(2) $g(c) < 0$ ならば，ある $\delta > 0$ に対して

$$g(t) < 0 \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$

連続関数の性質 (2)（復習）—定理の応用

開区間 (A, B) 上の関数 $f:\ (A, B) \to \mathbf{R}$ が $t = c \in (A, B)$ で連続とします．任意の $\varepsilon > 0$ を取ります．

$g_1(t) := f(t) - f(c) + \varepsilon$ は

$$g_1(c) = f(c) - f(c) + \varepsilon = \varepsilon > 0$$

となりますから，ある $\delta_1 > 0$ に対して $c - \delta_1 < t < c + \delta_1$ ならば

$$g_1(t) = f(t) - f(c) + \varepsilon > 0 \quad \textit{i.e.} \quad f(c) - \varepsilon < f(t)$$

$g_2(t) := f(t) - f(c) - \varepsilon$ は

$$g_2(c) = f(c) - f(c) - \varepsilon = -\varepsilon < 0$$

となりますから，ある $\delta_2 > 0$ に対して $c - \delta_2 < t < c + \delta_2$ ならば

$$g_2(t) = f(t) - f(c) - \varepsilon < 0 \quad \textit{i.e.} \quad f(t) < f(c) + \varepsilon$$

連続関数の性質 (2)（復習）—定理の応用

このとき $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ とすると

$$c - \delta < t < c + \delta \ \Rightarrow \ f(c) - \varepsilon < f(t) < f(c) + \varepsilon$$

であることが分かります.

Theorem

$f:\ (A, B) \to \mathbf{R}$ が $t = c \in (A, B)$ で連続であるならば，ある $\delta > 0$ が存在して

$$f(c) - \varepsilon < f(t) < f(c) + \varepsilon \quad (c - \delta < t < c + \delta)$$

微分積分学の基本定理 (1)

連続関数 $f: (A, B) \to \mathbf{R}$ と $a < t$ を満たす $a, t \in (A, B)$ に対して

$$F(t) := \int_a^t f(s)ds$$

と定義します.

Theorem

$F(t)$ は微分可能で

$$F'(t) = f(t)$$

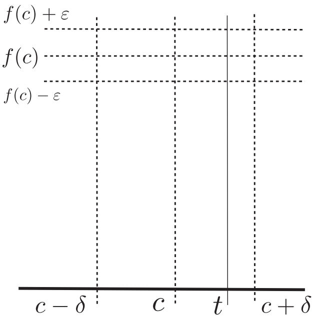
が成立します.

微分積分学の基本定理 (2)—証明

$t = c \in (A, B)$ で微分可能であることを示します.
任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$c - \delta < t < c + \delta \Rightarrow f(c) - \varepsilon < f(t) < f(c) + \varepsilon$$

が成立します.



微分積分学の基本定理 (3)—証明

$c < t < c + \delta$ とします．（$c - \delta < t < c$ の場合も同様．）このとき

$$F(t) - F(c) = \int_a^t f(s)ds - \int_a^c f(s)ds = \int_c^t f(s)ds + \int_a^c f(s)ds - \int_a^c f(s)ds = \int_c^t f(s)ds$$

と

$$(f(c) - \varepsilon)(t - c) < \int_c^t f(s)ds < (f(c) + \varepsilon)(t - c)$$

から

$$f(c) - \varepsilon < \frac{F(t) - F(c)}{t - c} < f(c) + \varepsilon$$

これは

$$\frac{F(t) - F(c)}{t - c} \to f(c) \quad (t \to c)$$