積分 V
置換積分（その 2）

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

V01 Nov 24, 2020 for CalcNT

置換積分

公式

$$\int_A^B f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (A = \varphi(a), B = \varphi(b))$$

具体例 (1)

(1)

$$I := \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

について考えます.

$$x = \varphi(t) := \tan t$$

とすると $\varphi'(t) = 1 + \tan^2 t$ で，対応 $\begin{array}{c|ccc} t & 0 & \nearrow & \frac{\pi}{4} \\ \hline x & 0 & \nearrow & 1 \end{array}$ によって

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t} \cdot (1 + \tan^2 t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

具体例 (2)

(2)

$$I := \int_{-2}^{1} \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$$

$x+3=t$ となるように $x=\varphi(t)=t-3$ とします．$\varphi'(t)=1$ で積分区間が

t	1	$\nearrow$	4
x	-2	$\nearrow$	1

と対応するので

$$\begin{aligned} I &= \int_{1}^{4} \frac{t-3}{\sqrt{t}} \cdot 1 dt \\ &= \int_{1}^{4} \left(\sqrt{t} - \frac{3}{\sqrt{t}} \right) dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t\sqrt{t} - 3 \cdot 2\sqrt{t} \right]_{1}^{4} = \frac{2}{3}(8-1) - 6(2-1) = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

具体例 (3)

$\sqrt{x+3} = t$ となるように $x = \psi(t) = t^2 - 3$ とします． $\psi'(t) = 2t$ でで積分区間が $\begin{array}{c|ccc} t & 1 & \nearrow & 2 \\ \hline x & -2 & \nearrow & 1 \end{array}$ と対応するので

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \frac{t^2-3}{t} \cdot 2t dt \\
&= 2\int_1^2 (t^2-3) dt \\
&= 2\left[\frac{t^3}{3} - 3t\right]_1^2 = \cdots
\end{aligned}
$$