確率分布

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

が、

(i) $f(x) \geqq 0$

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

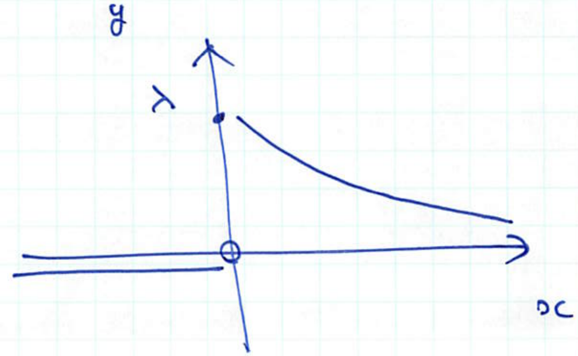
を満たすとき f を確率密度と呼びます。

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

と定義します。

例1

$\lambda > 0$ を定数とします.



$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

とすると

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$$

$t = \lambda x$ とする

となります. この密度が定める確率分布を指数分布と呼びます.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{t}{\lambda} e^{-t}\,dt = \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{+\infty} t e^{-t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$$

$t = \lambda x$

$dt = \lambda dx$

(b)

$$E[X^2] = \int_0^{+\infty} \lambda \cdot x^2 e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2} t^2 e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt . = \cdots = \frac{2}{\lambda^2}$$

$\uparrow$

前回

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

例1.2 (標準正規分布) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}$ となる.

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

が定めるのが標準正規分布である.

奇関数.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 0$$

$$E[X^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$\int_{-R}^{R} x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-R}^{R} x \left(-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)' dx = \left[-x e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_{-R}^{R} + \int_{-R}^{R} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$\longrightarrow 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

から $E[X^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1$ ゆえに $V[X] = 1$

例13 （正規分布） 母数 $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$$

$z = \frac{1}{\sigma}(x-m)$ とおく.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz = 1$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}\,dx.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma z + m)\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz = \sigma\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz + \frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz$$

$$= \sigma\cdot 0 + m\cdot 1 = m$$

$$V[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 z^2 \, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \sigma^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \sigma^2$$