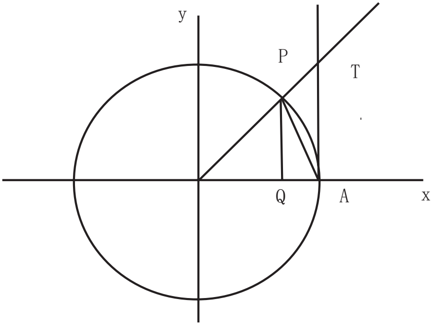
三角関数の微分

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2020 年 07 月 01 日 at 日吉

基本的な極限 (1)



$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とします.

$$\triangle\ \mathrm{OAP} = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\text{扇形}\mathrm{OAP} = \frac{1}{2}\theta$$

基本的な極限 (2)

$$0 < \frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta$$

ここではさみうちの定理を用いると

$$\lim_{\theta \to +0} \sin\theta = 0 \tag{1}$$

が従います.

基本的な極限 (3)

次に $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ とします．このとき $\tau = -\theta$ とすると

$$0 < \tau < \frac{\pi}{2}$$

で $\theta \to -0$ のとき $\tau \to +0$ が従います．さらに

$$\sin\theta = \sin(-\tau) = -\sin\tau \to 0 \quad (\theta \to -0) \tag{2}$$

となります．(1),(2) から

$$\sin\theta \to 0 \quad (\theta \to 0) \tag{3}$$

基本的な極限 (4)

$\theta \to 0$ のとき

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \to 1 - 0 = 1$$

から

$$\cos\theta \to 1 \quad (\theta \to 0) \tag{4}$$

三角関数の連続性

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \sin((\theta-\theta_0)+\theta_0)\\ &= \sin(\theta-\theta_0)\cos\theta_0+\cos(\theta-\theta_0)\sin\theta_0\end{aligned}$$

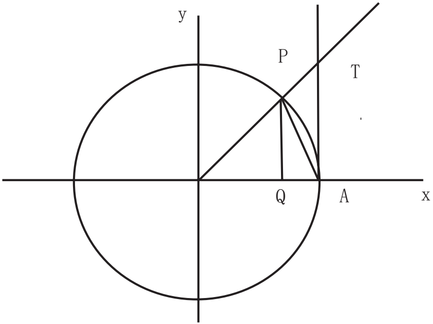
$\theta \to \theta_0$ のとき $\theta-\theta_0 \to 0$ なので

$$\sin(\theta-\theta_0)\cos\theta_0+\cos(\theta-\theta_0)\sin\theta_0 \to 0\cdot\cos\theta_0+1\cdot\sin\theta_0=\sin\theta_0$$

従って，$\sin\theta$ は $\theta=\theta_0$ で連続であることが分かります.

問 $\cos\theta$ は $\theta=\theta_0$ で連続であることを示しましょう.

基本的な極限 (5)



$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とします.

$$\begin{gathered}\triangle\ \mathrm{OAP} = \frac{1}{2}\sin\theta \\ \wedge \\ 扇形\mathrm{OAP} = \frac{1}{2}\theta \\ \wedge \\ \triangle\ \mathrm{OAT} = \frac{1}{2}\tan\theta\end{gathered}$$

基本的な極限 (6)

$$\sin\theta < \theta < \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

さらに $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ から $\sin\theta > 0$ ですから

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$\theta \to +0$ のとき $\cos\theta \to 1$ となりますから

$$\frac{\theta}{\sin\theta} \to 1 \quad (\theta \to +0)$$

従って

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1 \quad (\theta \to +0) \tag{5}$$

基本的な極限 (7)

$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ のとき $\tau = -\theta$ は

$$0 < \tau < \frac{\pi}{2}$$

で $\theta \to -0$ のとき $\tau \to +0$ となって

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin(-\tau)}{(-\tau)} = \frac{-\sin\tau}{(-\tau)} = \frac{\sin\tau}{\tau} \to 1$$

従って

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1 \quad (\theta \to -0) \tag{6}$$

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1 \quad (\theta \to 0) \tag{7}$$

三角関数の微分 (1)

$h = \theta - \theta_0$ とすると $\theta \to \theta_0$ のとき $h \to 0$ となります.

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin\theta - \sin\theta_0}{\theta - \theta_0} &= \frac{\sin(\theta_0 + h) - \sin\theta_0}{h} \\
&= \frac{\sin\theta_0 \cdot \cos h + \sin h \cdot \cos\theta_0 - \sin\theta_0}{h} \\
&= \sin\theta_0 \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos\theta_0 \cdot \frac{\sin h}{h}
\end{aligned}
$$

において

三角関数の微分 (2)

$$\frac{1-\cos h}{h^2} = \frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h^2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 \to \frac{1}{2} \quad (h \to 0)$$

従って

$$\frac{\cos h - 1}{h} = -h\cdot\frac{1-\cos h}{h^2} \to -0\cdot\frac{1}{2} = 0 \quad (h \to 0)$$

となりますから

$$\sin\theta_0\cdot\frac{\cos h-1}{h} + \cos\theta_0\cdot\frac{\sin h}{h} \to \sin\theta_0\cdot 0 + \cos\theta_0\cdot 1 = \cos\theta_0 \quad (h \to 0)$$

三角関数の微分 (3)

以上で

$$(\sin\theta)' = \cos\theta$$

同様に

$$(\cos\theta)' = -\sin\theta$$