3 次行列式確認問題（2020SLInL01 exo）

VI 以下の行列式を計算しましょう．$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

解答

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-3) - 4 \cdot (-6) + 7 \cdot (-3) \\ &= -3 + 24 - 21 = 0\end{aligned}$$

注意　もう少し勉強を進めると，行基本変形を用いて

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

と計算できるようになります.

VII 行列式 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$ を計算しましょう．解答は因数分解した形にしましょう．

解答

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} &\overset{(*)}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -\lambda \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -4 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda\{(-\lambda)(2-\lambda) - (-2)(-4)\} \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 8) \\ &= -\lambda(\lambda - 4)(\lambda + 2)\end{aligned}$$

VIII(1) $\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix}$ を計算しましょう.

(2) (1) の行列式を 0 にする $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して $\begin{pmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ を解きましょう.

解答 (1)

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} \overset{(i)}{=} \begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} \overset{(ii)}{=} (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$
$$\overset{(iii)}{=} (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & -4 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ -4 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-2)\{(\lambda-4)(\lambda-6)-(-4)(-2)\} = (\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

から求める $\lambda \in \mathbf{R}$ は $\lambda = 2, 8$ であることが分かります. 上で用いた行基本変形は

$$\text{(i) } 1r+ = 2r \times 1, \text{ (iii) } 2r+ = 1r \times (-1),\ 3r+ = 1r \times (-2)$$

です. (ii) では 1 行の線型性を用いていますが, 行列の基本変形（1 行の非零倍）であるのは $\lambda \neq 2$ の場合です.

(2) 以下では行列式の中身の行列を A_λ とします.

$\underline{\lambda = 2 \text{ のとき}}$ (1) で用いた行基本変形を用いると

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \overset{(i)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \overset{(ii)}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow x - y - 2z = 0$$

であることが分かります. 従って解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されます. 上で行基本変形

$$\text{(i) } 1r \leftrightarrow 2r,\ \text{(ii) } 3r+ = 1r \times (-2)$$

を用いました.

$\underline{\lambda = 8 \text{ のとき}}$(1) で用いた行基本変形を用いると

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(ii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$A_8 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & \frac{1}{2}z & = & 0 \\ & & y & - & \frac{1}{2}z & = & 0 \end{array} \right.$$

であることが分かります．従って

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{z}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と表されます．上で行基本変形

$$\text{(i) } 2r \times = \frac{1}{4}, \text{ (ii) } 1r+ = 2r \times (-1), \, 3r+ = 2r \times 4$$

を用いました．

IX 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$ を計算しましょう．

解答

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & 1 & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 1 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & 1 & b^2+ba+a^2 \\ 0 & 0 & c^2-b^2+ca-ba \end{vmatrix} \\ &= (b-a)(c-a)(c^2-b^2+ca-ba) \\ &= (b-a)(c-a)(c-b)(c+b+a) \\ &= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \end{aligned}$$

X 連立 1 次方程式

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

をクラメールの公式で解きましょう．ただし x だけで十分です．

解答

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

XI 連立 1 次方程式

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & + & 4z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \\ 10x & + & 15y & + & 21z & = & 28 \end{cases}$$

をクラメールの公式を用いて解きましょう．ただし y を与えるだけで十分です．

解答

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 11 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

からクラメールの定理が使えます．

$$y = -\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 28 & 21 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 18 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 18 & 11 \end{vmatrix} = 33 - 36 = -3$$

XII 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ の余因子行列を $\tilde{A}$ とします．$A\tilde{A}$ の 2 行 1 列が 0 になることを示しましょう．

解答 A の余因子行列は

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

となります．$A\tilde{A}$ の 2 行 1 列は

$$\begin{aligned} (b_1\ b_2\ b_3) \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} &= b_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + b_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

XIII $abc \neq 0$ とします．$A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ a & 0 & b \\ c & b & 0 \end{pmatrix}$ に対してクラメールの公式を用いて A^{-1} を求めましょう．

解答

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & c \\ a & 0 & b \\ c & b & 0 \end{vmatrix} &= -a \begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & b \end{vmatrix} \\ &= abc + abc = 2abc \neq 0 \end{aligned}$$

から A は正則で

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ b & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & b \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & b \\ c & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & c \\ a & b \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & b \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & a \\ c & b \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2 & bc & ab \\ bc & -c^2 & ac \\ ab & ac & -a^2 \end{pmatrix}$$

から

$$A^{-1} = \frac{1}{2abc}\begin{pmatrix} -b^2 & bc & ab \\ bc & -c^2 & ac \\ ab & ac & -a^2 \end{pmatrix}$$