3 次行列式演習問題（2020SLInL01 exo）

I $\vec{a} \in \mathbf{R}^3$ は $\vec{a} = {}^t(a_1\ a_2\ a_3) \neq \vec{0}$ を満たすとします。$\det(I_3 + \vec{a} \cdot {}^t\vec{a})$ を計算しましょう。

解答　$\vec{a}$ を含む $\mathbf{R}^3$ の基底 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を

$$(\vec{a}, \vec{b}) = {}^t\vec{a}\vec{b} = 0, \quad (\vec{a}, \vec{c}) = {}^t\vec{a}\vec{c} = 0,$$

が成立するように取ります．具体的には部分空間

$$V := \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3;\ (\vec{a}, \vec{v}) = 0\}$$

の基底 $\vec{b}, \vec{c}$ を選びます．このとき

$$\begin{aligned}
(I_3 + \vec{a}\,{}^t\vec{a})\vec{a} &= \vec{a} + ||\vec{a}||^2\vec{a} = (1 + ||\vec{a}||^2)\vec{a} \\
(I_3 + \vec{a}\,{}^t\vec{a})\vec{b} &= \vec{b} + (\vec{a}, \vec{b})\vec{a} = \vec{b} \\
(I_3 + \vec{a}\,{}^t\vec{a})\vec{c} &= \vec{c} + (\vec{a}, \vec{c})\vec{a} = \vec{c}
\end{aligned}$$

から

$$(I_3 + \vec{a}^t\vec{a})(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} 1 + ||\vec{a}||^2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

となします．$P = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ とすると P は正則行列で

$$P^{-1}(I_3 + \vec{a}^t\vec{a})P = \begin{pmatrix} 1 + ||\vec{a}||^2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

であることが分かります．これから

$$\det(P^{-1}(I_3 + \vec{a}^t\vec{a})P) = \det(I_3 + \vec{a}^t\vec{a}) = \begin{vmatrix} 1 + ||\vec{a}||^2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} = 1 + ||\vec{a}||^2$$

が従います．

II 座標平面上の 3 点 (x_i, y_i) $(i = 1, 2, 3)$ が同一直線上にあるための必要十分条件が

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

であることを証明しましょう．

解答　（必要であること）3 点 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) が直線 $ax + by + c = 0$ 上にあるとします．このとき

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{\#}$$

が成立しますが，$a \neq 0$ または $b \neq 0$ も成立します．このとき $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に対して (#) が成立しますから

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{\$}$$

が従います．

（十分であること）逆に ($) が成立するとします．このとき (#) を満たす $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在します．ここで，もし $a = b = 0$ とすると (#) から $c = 0$ となりますから，$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ に反します．従って $a \neq 0$ または $b \neq 0$ が成立します．これは 3 点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) が直線 $ax + by + c = 0$ 上にあることを意味します．

III

$$\frac{b+c}{a} = \frac{c+13a}{b} = \frac{a-b}{c}$$

が成立します。この式の値を 3 次の行列式を用いて求めましょう。

解答　式の値を k とします．このとき

$$\frac{b+c}{a} = \frac{c+13a}{b} = \frac{a-b}{c} = k$$

から

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & b & + & c & = & ka \\ 13a & & & + & c & = & kb \\ a & - & b & & & = & kc \end{array}\right. \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ -13 & k & -1 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \tag{\#}$$

が従います．$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ から $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が分かりますから

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} k & -1 & -1 \\ -13 & k & -1 \\ -1 & 1 & k \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} k-1 & 0 & k-1 \\ -13 & k & -1 \\ -1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -13 & k & -1 \\ -1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k & 12 \\ 0 & 1 & k+1 \end{vmatrix} \\ &= (k-1)(k+4)(k-3) \end{aligned}$$

から $k = -4, 1, 3$ が必要であることが分かります．（このとき (#) を満たす $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ を満たすとは限りませんから，十分であるかはまだ分かりません．）

$k=-4$ のとき

$$
\begin{aligned}
(\#) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 12 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow a = c, b = 3c
\end{aligned}
$$

から $(\#)$ の解は

$$
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 3c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

となることが分かります．これから $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ならば $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ を満たします．よって式の値として $k=-4$ をとることが分かります.

$k=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
(\#) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -13 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{13}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow a = c\frac{13}{6}, b = c\frac{7}{6}
\end{aligned}
$$

から $(\#)$ の解は

$$
\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \frac{13}{6}c \\ \frac{7}{6}c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{6} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}
$$

となることが分かります．これから $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ならば $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ を満たします．よって式の値として $k=-1$ をとることが分かります.

$k=3$ のとき

$$
\begin{aligned}
(\#) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow a = c, b = -4c
\end{aligned}
$$

から (#) の解は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -4c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となることが分かります．これから $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ならば $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ を満たします．よって式の値として $k = 3$ をとることが分かります.

IV $A \in M_3(\mathbf{Z})$ とします。すなわち $A = (a_{ij})$ とするとき

$$a_{ij} \in \mathbf{Z}$$

が成立するとします．A が正則であると仮定すると

$$A^{-1} \in M_3(\mathbf{Z}) \Leftrightarrow |A| = \pm 1$$

が成立することを示しましょう.

解答 $(\Rightarrow)$ $A^{-1} \in M_3(\mathbf{Z})$ とすると $|A^{-1}| \in \mathbf{Z}$ であることが分かります．このとき

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |A \cdot A^{-1}| = |I_3| = 1$$

と $|A| \in \mathbf{Z}$ から $|A^{-1}| = \pm 1$ が従います.
$(\Leftarrow)$ A の余因子行列は $\tilde{A} \in M_3(\mathbf{Z})$ を満たします．このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \pm \tilde{A} \in M_3(\mathbf{Z})$$

であることが分かります.

V (1)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

を示しましょう.
(2)

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$$

を示しましょう．ただし

$$\alpha = ax + by + cz, \quad \beta = ay + bz + cx, \quad \gamma = az + bx + cy$$

とします.

解答 (1) サラスの公式で計算するのが最も簡単ではないかと思います.

(2)

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

であることを用います.

VI $a, b, c \in \mathbf{R}$ は相異なる実数とします．このとき 3 点

$$(a, \alpha), \quad (b, \beta), \quad (c, \gamma) \tag{1}$$

を通る放物線

$$y = Ax^2 + Bx + C \tag{2}$$

を求めましょう．ここではクラメールの公式を用いて A, B, C を求めましょう．

解答

$$\begin{cases} Aa^2 & + & Ba & + & C & = & \alpha \\ Ab^2 & + & Bb & + & C & = & \beta \\ Ac^2 & + & Bc & + & C & = & \gamma \end{cases}$$

を A, B, C の連立 1 次方程式と見做して解きます．係数行列式は

$$D := \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$$

となります．従ってクラメールの公式を用いると

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha & a & 1 \\ \beta & b & 1 \\ \gamma & c & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\{\alpha(b-c) + \beta(c-q) + \gamma(a-b)\} \\ B &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a^2 & \alpha & 1 \\ b^2 & \beta & 1 \\ c^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\{\alpha(c^2-b^2) + \beta(a^2-c^2) + \gamma(b^2-a^2)\} \\ C &= \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a^2 & a & \alpha \\ b^2 & b & \beta \\ c^2 & c & \gamma \end{vmatrix} = \frac{1}{D}\{\alpha bc(b-c) + \beta ac(c-q) + \gamma ab(a-b)\} \end{aligned}$$

と計算されます（対称性を崩さないように展開はこの程度にします）．これを用いると

$$\begin{aligned} y &= Ax^2 + Bx + C \\ &= \frac{1}{D}\{\alpha(b-c)x^2 + \alpha(c^2-b^2)x + \alpha bc(b-c)\} \\ &\quad + \frac{1}{D}\{\beta(c-a)x^2 + \beta(a^2-c^2)x + \beta ac(c-a)\} \\ &\quad + \frac{1}{D}\{\gamma(a-b)x^2 + \gamma(b^2-a^2)x + \gamma ab(a-b)\} \\ &= \alpha \cdot \frac{x^2 - (b+c)x + bc}{(b-a)(c-a)} + \beta \cdot \frac{x^2 - (a+c)x + ac}{(b-a)(b-c)} + \gamma \cdot \frac{x^2 - (a+b)x + bc}{(c-a)(c-b)} \\ &= \alpha \cdot \frac{(x-b)(x-c)}{(b-a)(c-a)} + \beta \cdot \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \gamma \cdot \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \end{aligned}$$

VII 3 本の列ベクトル $\vec{p}_j = \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ $(j = 1, 2, 3)$ が $\vec{p}_j \neq \vec{0}$ を満たしているとします．$\vec{p}_j$ を法線ベクトルとして原点を通る 3 平面

$$\pi_j:\ a_j x + b_j y + c_j z = 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

が 1 直線を共有する必要十分条件が

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

であることを示しましょう．

解答 $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2$ が成立する場合と $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$ が成立する場合に分けて議論します．

(i) $\underline{\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_2 \text{ の場合}}$ $\vec{q} := \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \neq \vec{0}$ となり，π_1 と π_2 の交わりは

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \mathbf{R}\vec{q} := \{t\vec{q} \in \mathbf{R}^3;\ t \in \mathbf{R}\}$$

と原点を通り $\vec{q}$ が方向ベクトルの直線となります．従って $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ が 1 直線を共有するためには

$$\mathbf{R}\vec{q} \subset \pi_3$$

が必要十分条件です．この条件は $\vec{q} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ とするとき

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad a_3 \cdot t\alpha + b_3 \cdot t\beta + c_3 \cdot t\gamma = 0$$

となるが，これは

$$a_3 \cdot \alpha + b_3 \cdot \beta + c_3 \cdot \gamma = 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 = (\vec{q}, \vec{p}_3) = (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2, \vec{p}_3) = |\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3|$$

と必要十分であることが分かります．

(ii) $\underline{\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2 \text{ の場合}}$

$$\pi_1 = \pi_2, \quad \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \vec{0}$$

が成立します．このとき

$$|\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3| = (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2, \vec{p}_3) = (\vec{0}, \vec{p}_3) = 0$$

が成立します．さらに $\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_3$ が成立する場合と $\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_3$ が成立する場合に分けて考えます．

(ii-a) $\underline{\vec{p}_1 \nparallel \vec{p}_3 \text{ の場合}}$

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \pi_1 \cap \pi_3 = \mathbf{R}(\vec{p}_1 \times \vec{p}_3)$$

と π_1, π_2, π_3 は $\vec{p}_1 \times \vec{p}_3$ を方向ベクトルとして原点を通る直線を共有することが分かります．

(ii-b) $\underline{\vec{p}_1 \parallel \vec{p}_3 \text{ の場合}}$

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$$

となり，π_1 に含まれるすべての直線を π_1, π_2, π_3 は共有することが分かります．

補足 3 次正方行列

$$A := \begin{pmatrix} {}^t\vec{p}_1 \\ {}^t\vec{p}_2 \\ {}^t\vec{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

に対して

$$\ker(A) := \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3;\ A\vec{v} = \vec{0}\} = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^3;\ (\vec{p}_j, \vec{v}) = 0\ (j = 1, 2, 3)\}$$

を A の核（kernel) または解空間と呼びます．このとき

$$\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \ker(A)$$

が成立します．一般に

$$\boxed{|A| \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ker A \neq \{\vec{0}\}}$$

が成立します．また $\ker(A)$ は和とスカラー倍に関して閉じています：

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \ker(A)\ \Rightarrow \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2 \in \ker(A)$$

も成立します．従って

$$\det(A) = \det({}^tA) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\vec{v}_0 \neq \vec{0}\text{に対して}\mathbf{R}\vec{v}_0 \subset \ker(A)$$

であることが分かります.