線型代数演習 01b–行列の積

I 次の行列の積を計算しましょう.

(1) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ **(2)** $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(4)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(5)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **(7)** $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(8)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(10)** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(11)** $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

解答

(1)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha & 0 \\ 0 & \cos\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \lambda y \\ y \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \lambda x + y \end{pmatrix}$$

(5)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ y \end{pmatrix}$$

(7)

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda + \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(8)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(9)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \lambda a_1 + b_1 \\ a_2 & \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \lambda\vec{a} + \vec{b})$$

(10)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\lambda\vec{a}\ \vec{b})$$

(11)

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad i.e. \quad (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{b}\ \vec{a})$$

II $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ とします．以下を計算しましょう。

(1) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(2)** $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(3)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(4)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(5)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(6) $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(7)** $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(8)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(9)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(10) $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(11)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, **(12)** $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

解答 (1)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{a}$$

(2)

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = \vec{b}$$

(3)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{a}$$

(4)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{b}$$

(5)

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 1 \cdot \vec{c} = \vec{c}$$

(6)

$$(\vec{a}\,\vec{b})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} & 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

(7)

$$(\vec{a}\,\vec{b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} & 1 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}\ \vec{a} \end{pmatrix}$$