「次元と座標」演習問題

I 次の $\vec{a},\vec{b},\vec{\alpha},\vec{\beta} \in \mathbf{R}^n$ に対して以下の (i),(ii),(iii),(iv) を示しましょう.

(i) $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ を示しましょう.

(ii)

$$L = \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

を考えます.

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in L$$

を示しましょう.

(iii) $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ を示しましょう.

(iv) L の基底 $\vec{a},\vec{b}$ に関する座標を $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, 基底 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ に関する座標 $\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right)$ とするとき $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ を $\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right)$ で表しましょう.

(1) $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{\alpha} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -6 \\ 10 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{\beta} = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

(2) $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{\alpha} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{\beta} = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 8 \\ -5 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$

(3) $\vec{a} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{b} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{\alpha} = \left(\begin{smallmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\vec{\beta} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \\ -5 \end{smallmatrix}\right)$

解答 (1)(i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ から $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ が従います.

(ii)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -6 & 5 \\ -1 & 4 & 10 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 12 & 6 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

から

$$\vec{\alpha} = -2\vec{a} + 2\vec{b} \in L, \quad \vec{\beta} = 3\vec{a} + \vec{b} \in L$$

が分かります.

(iii) $(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) = (\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{smallmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ において $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$ から $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ が従います.

(iv)

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta})\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) = (\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{smallmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) = (\vec{a}\ \vec{b})\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$$

から

$$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right)$$

が従います.

(2)(i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ から $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ が従います.

(ii)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ -1 & -2 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

から

$$\vec{\alpha} = 4\vec{a} - \vec{b} \in L, \quad \vec{\beta} = \vec{a} + 2\vec{b} \in L$$

が分かります.

(iii) $(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) = (\vec{a}\ \vec{b}) \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ において $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$ から $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ が従います.

(iv)

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) = (\vec{a}\ \vec{b}) \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) = (\vec{a}\ \vec{b}) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$$

から

$$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right)$$

が従います.

(3)(i) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$ から $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ が従います.

(ii)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & 6 & -1 \\ 1 & 3 & 7 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 6 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -11 & -22 & -33 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & -7 & -14 & -21 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & -7 & -14 & -21 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

から

$$\vec{\alpha} = \vec{a} + 2\vec{b} \in L, \quad \vec{\beta} = -\vec{a} + 3\vec{b} \in L$$

が分かります.

(iii) $(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) = (\vec{a}\ \vec{b}) \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ において $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ から $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ が従います.

(iv)

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) = (\vec{a}\ \vec{b}) \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right) = (\vec{a}\ \vec{b}) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$$

から

$$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \xi \\ \eta \end{smallmatrix}\right)$$

が従います.

II $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ が定める 2 次元部分空間

$$L=L(\vec{a},\vec{b})=\{x\vec{a}+y\vec{b};\ x,y\in\mathbf{R}\}$$

に対して $\vec{v}\in\mathbf{R}^3$ の L への直交射影 $\vec{w}$ を考えます.

$$Q\vec{v}=\vec{w}$$

を満たす 3 次正方行列を求めましょう.

解答 $\vec{a},\vec{b}$ を正規直交化すると

$$\vec{p}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \vec{q}=\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$$

となります. これから $\vec{v}$ の L への直交射影は

$$\begin{aligned}\vec{w}&=(\vec{p},\vec{v})\vec{p}+(\vec{q},\vec{v})\vec{q}\\&=\vec{p}\cdot{}^t\vec{p}\vec{v}+\vec{q}\cdot{}^t\vec{q}\vec{v}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\vec{v}\\&\qquad+\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4&1&-5\end{pmatrix}\vec{v}\\&=\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}+\frac{1}{42}\begin{pmatrix}16&4&-20\\4&1&-5\\-20&-5&25\end{pmatrix}\right)\vec{v}\\&=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}10&6&-2\\7&5&3\\-2&3&13\end{pmatrix}\vec{v}\end{aligned}$$

から

$$Q=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}10&6&-2\\7&5&3\\-2&3&13\end{pmatrix}$$

別解 $L(\vec{a},\vec{b})$ に垂直なベクトルとして $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}$ を取ります. このとき $\vec{v}$ の $\vec{c}$ への直交射影を $\vec{z}$ とすると

$$\vec{v}=\vec{w}+\vec{z}$$

が成立します. これから

$$\begin{aligned}\vec{w}&=\vec{v}-\frac{(\vec{c},\vec{v})}{\|\vec{c}\|^2}\vec{c}\\&=\vec{v}-\frac{1}{\|\vec{c}\|^2}\vec{c}\,{}^t\vec{c}\vec{v}\\&=I_3\vec{v}-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}4&-6&2\\-6&-9&-3\\2&-3&1\end{pmatrix}\vec{v}\\&=\left(I_3-\frac{1}{14}\begin{pmatrix}4&-6&2\\-6&-9&-3\\2&-3&1\end{pmatrix}\right)\vec{v}\\&=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}10&6&-2\\7&5&3\\-2&3&13\end{pmatrix}\vec{v}\end{aligned}$$

となります.

III 以下の $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{R}^n$ に対して $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が張る部分空間

$$L_3=L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\{x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c};\ x,y,z\in\mathbf{R}\}$$

の正規直交基底を求めましょう.

(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ **(2)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

(3) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ **(4)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

解答 先行する問題で $L(\vec{a},\vec{b})$ の正規直交基底を求めている場合は省略してあります.

(1)

$$L =: \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

の正規直交系として

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$$

で, $\vec{c}$ の L への直交射影が

$$\begin{aligned}\vec{w}_2 &= (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q}\\ &= \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2\\3\\13\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります．L に垂直な L_3 中のベクトルとして

$$\vec{c} - \vec{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{14}\begin{pmatrix}-2\\3\\13\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

を考えると，これを正規化して

$$\vec{r} = \frac{1}{||\vec{c} - \vec{w}_2||}(\vec{c} - \vec{w}_2) = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります.

(2)

$$L =: \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

の正規直交系として

$$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

で, $\vec{c}$ の L への直交射影が

$$\begin{aligned}\vec{w}_2 &= (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q}\\ &= \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{17}\begin{pmatrix}-4\\6\\13\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となります．L に垂直な L_3 中のベクトルとして

$$\vec{c} - \vec{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{17}\begin{pmatrix}-4\\6\\13\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix}4\\-6\\4\end{pmatrix}$$

を考えると，これを正規化して

$$\vec{r} = \frac{1}{||\vec{c} - \vec{w}_2||}(\vec{c} - \vec{w}_2) = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります.

(3) $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への直交射影 $\vec{w}$ は

$$\vec{w} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{||\vec{a}||^2} = \frac{1}{4}\vec{a}$$

と求められます．このとき $\vec{a}$ の垂直なベクトルとして

$$\vec{b} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

が求まります．このとき $\vec{a}$ と $\vec{b} - \vec{w}$ を正規化した

$$\vec{p} = \frac{1}{||\vec{a}||}\vec{a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{||\vec{b} - \vec{w}||}(\vec{b} - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

が

$$L =: \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

の正規直交基底となります．$\vec{c}$ の L への直交射影が

$$\begin{aligned}
\vec{w}_2 &= (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{44}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となります．L に垂直な L_3 中のベクトルとして

$$\vec{c} - \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を考えると，これを正規化して

$$\vec{r} = \frac{1}{||\vec{c} - \vec{w}_2||}(\vec{c} - \vec{w}_2) = \frac{1}{\sqrt{66}}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります.

(4)

$$L =: \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

の正規直交系として

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を求めました．$\vec{c}$ の L への直交射影が

$$\begin{aligned}
\vec{w}_2 &= (\vec{c}, \vec{p})\vec{p} + (\vec{c}, \vec{q})\vec{q} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となります．L に垂直な L_3 中のベクトルとして

$$\vec{c} - \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を考えると，これを正規化して

$$\vec{r} = \frac{1}{||\vec{c} - \vec{w}_2||}(\vec{c} - \vec{w}_2) = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と定めると $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が L_3 の正規直交基底となります．

IV
$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ が張る部分空間

$$L = L(\vec{a}, \vec{b}) = \{x\vec{a} + y\vec{b};\ x, y \in \mathbf{R}\}$$

を考えます．

$$\vec{c}, \vec{d} \in L, \lambda, \mu \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda\vec{c} + \mu\vec{d} \in L$$

を示しましょう．

解答 $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in L$ であるので

$$\vec{\alpha} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}, \quad \vec{\beta} = x_2\vec{a} + y_2\vec{b}$$

と表されます．このとき

$$
\begin{aligned}
\vec{\alpha}+\vec{\beta} &= x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+x_2\vec{a}+y_2\vec{b} \\
&= (x_1+x_2)\vec{a}+(y_1+y_2)\vec{b}\in L \\
\lambda\vec{\alpha} &= \lambda(x_1\vec{a}+y_1\vec{b}) = (\lambda x_1)\vec{a}+(\lambda y_1)\vec{b}\in L
\end{aligned}
$$

となります.

V 以下のベクトルが線型独立か線型従属か行列の行基本変形を用いて判定しましょう．

(i) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}7\\-4\\1\end{pmatrix}$

(ii) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$

(iii) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-3\\7\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\-6\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}, \vec{d}=\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$

(iv) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-3\\7\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}$

解答 (i) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ を行基本変形します.

$$
\begin{pmatrix}1&2&7\\-2&1&-4\\1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)}\begin{pmatrix}1&2&7\\0&5&10\\0&-3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)}\begin{pmatrix}1&2&7\\0&1&2\\0&-3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)}\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}
$$

から $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ は

$$
\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 3z & = & 0\\ & & y & + & 2z & = & 0\end{array}\right.
$$

と必要十分であることが分かります．特に $z=-1$ として $x=3,\ y=2$ が解となりますから

$$
3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}
$$

が成立することが分かります．よって $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線型従属であることが分かります.

なお，上で以下の行基本変形を用いました.

$$
\begin{array}{ll}
(1) & 2r+=1r\times 2,\ 3r+=1r\times(-1)\\
(2) & 2r\times=\frac{1}{5}\\
(3) & 1r+=2r\times(-2),\ 3r+=2r\times 3
\end{array}
$$

(ii) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ を行基本変形します.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

から $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ は

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & & & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{array} \right.$$

と必要十分であることが分かります. 従って $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ から $x=y=z=0$ が従いますから, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線型独立であることが分かります.

なお, 上で以下の行基本変形を用いました.

$$\begin{array}{ll} (1) & 2r+=1r\times(-2),\ 3r+=1r\times 3 \\ (2) & 2r\times=\left(-\frac{1}{5}\right) \\ (3) & 1r+=2r\times(-1),\ 3r+=2r\times(-5) \\ (4) & 3r\times=\frac{1}{6} \\ (5) & 1r+=3r\times(-1),\ 2r+=3r\times(-1) \end{array}$$

(iii) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+w\vec{d}=\vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})$ を行基本変形します.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -1 & 4 \\ 7 & 6 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & -8 & -22 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & -8 & -22 & -19 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{34}{3} & -\frac{17}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

から $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}+w\vec{d}=\vec{0}$ は

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & - & \frac{3}{2}w & = & 0 \\ & y & & + & \frac{5}{6}w & = & 0 \\ & & z & + & \frac{1}{2}w & = & 0 \end{array} \right.$$

と必要十分であることが分かります. 従って $w=1$ として得られる解

$$x=\frac{3}{2},\ y=-\frac{5}{6},\ z=-\frac{1}{2},\ w=1$$

を用いると非自明な線型関係

$$\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{5}{6}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$$

が成立することが分かります. よって $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ は線型従属であることが分かりました.

なお，上で以下の行基本変形を用いました．

$$
\begin{array}{ll}
(1) & 2r+=1r\times 3,\ 3r+=1r\times(-7) \\
(2) & 2r\times=\left(\frac{1}{6}\right) \\
(3) & 1r+=2r\times(-2),\ 3r+=2r\times 8 \\
(4) & 3r\times=\left(-\frac{3}{34}\right) \\
(5) & 1r+=3r\times\left(-\frac{1}{3}\right),\ 2r+=3r\times\left(-\frac{5}{6}\right)
\end{array}
$$

(iv) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ を解くために $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ を行基本変形します．

$$
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -4 \end{pmatrix}
\xrightarrow{(1)}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ -3 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -4 \end{pmatrix}
\xrightarrow{(2)}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{29}{2} \end{pmatrix}
\xrightarrow{(3)}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{29}{2} \end{pmatrix}
$$
$$
\xrightarrow{(4)}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

から $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$ は

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
x \qquad\qquad & = & 0 \\
z & = & 0
\end{array}
\right.
$$

と必要十分であることが分かります．従って

$$
x=0,\ y=1,\ z=0
$$

が解となりますから，非自明な線型関係

$$
1\cdot\vec{b}=\vec{0}
$$

が成立することが分かります．よって $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線型従属であることが示されました．

なお，上で以下の行基本変形を用いました．

$$
\begin{array}{ll}
(1) & 1r\times=\frac{1}{2} \\
(3) & 2r+=1r\times 3,\ 3r+=1r\times(-7) \\
(4) & 2r\times=\frac{2}{7} \\
(5) & 1r+=2r\times\left(-\frac{3}{2}\right),\ 3r+=2r\times\frac{29}{2}
\end{array}
$$

VI $\vec{a}_1,\vec{a}_2\in\mathbf{R}^n$, $A=(\vec{a}_1\ \vec{a}_2)$ とします．このとき

$$
{}^tAA\text{が正則}\Leftrightarrow\vec{a}_1\nparallel\vec{a}_2
$$

であることを示しましょう．

解答 $(\Rightarrow)$

$$
{}^tAA\text{が正則}\quad\Leftrightarrow\quad\left({}^tAA\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}=\vec{0}\right)
$$
$$
\vec{a}_1\nparallel\vec{a}_2\quad\Leftrightarrow\quad\left(A\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}=\vec{0}\right)
$$

が成立することに注意しましょう．ここで $A\vec{v}=\vec{0}$ とすると ${}^tAA\vec{v}=\vec{0}$ となりますが、${}^tAA$ が正則という前提の下では $\vec{v}=\vec{0}$ が従います．よって $\vec{a}_1\nparallel\vec{a}_2$ が成立します．

$(\Leftarrow)$ ${}^tAA\vec{v}=\vec{0}$ が成立するとします．このとき

$$||A\vec{v}||^2=(A\vec{v},A\vec{v})=({}^tA\vec{v},\vec{v})=(\vec{0},\vec{v})=0$$

から $A\vec{v}=\vec{0}$ が従います．いま $\vec{a}_1\nparallel\vec{a}_2$ を仮定していますから $\vec{v}=\vec{0}$ が従います.

VII(1) $ax+by=0$ を満たす $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が存在することを示しましょう.

(2) 連立 1 次方程式

$$\begin{cases}a_1x+a_2y+a_3z&=&0\\b_1x+b_2y+b_3z&=&0\end{cases}$$

を満たす $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が存在することを (1) を用いて示しましょう.

解答 (1)

(i) $\underline{a=0\text{ ならば}}$

$$a\cdot1+b\cdot0=0$$

から $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が解となります.

(ii) $\underline{a\neq0\text{ ならば}}$

$$y=-\frac{b}{a}x$$

から $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{b}{a}\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が解となります.

(2)

(i) $\underline{a_1=b_1=0\text{ ならば}}$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が解となります.

(ii) $\underline{a_1\neq0\text{ ならば}}$方程式は

$$\begin{cases}a_1x&+&a_2y&+&a_3z&=&0\\&&\left(b_2-\frac{b_1}{a_1}a_2\right)y&+&\left(b_3-\frac{b_1}{a_1}a_3\right)z&=&0\end{cases}$$

と必要十分です．このとき $\begin{pmatrix}y_0\\z_0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$ が存在して

$$\left(b_2-\frac{b_1}{a_1}a_2\right)y_0+\left(b_3-\frac{b_1}{a_1}a_3\right)z_0=0$$

が成立します．このとき

$$x_0=-\frac{1}{a_1}\left(a_2y_0+a_3z_0\right)$$

と定める $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が解となります.

(iii) $\underline{b_1 \neq 0 \text{ ならば}}$(ii) と同様に示すことができます．あるいは方程式が

$$\begin{cases} b_1x + b_2y + b_3z &= 0 \\ a_1x + a_2y + a_3z &= 0 \end{cases}$$

と必要十分であることに注意すれば，(ii) に帰着できます.

VIII $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbf{R}^n$ が

$$\vec{p} \perp \vec{q}, \quad \vec{p} \neq \vec{0}, \quad \vec{q} \neq \vec{0}$$

が成立するとき

$$\vec{p} \nparallel \vec{q}$$

が成立することを示しましょう.

解答

$$c_1\vec{p} + c_2\vec{q} = \vec{0} \tag{1}$$

が成立するとします．この両辺と $\vec{q}$ との内積をとると

$$0 = c_1(\vec{p}, \vec{q}) + c_2||\vec{q}||^2 = c_2||\vec{q}||^2$$

となります．このとき $\vec{q} \neq \vec{0}$ から $||\vec{q}||^2 > 0$ が成立します．従って $c_2 = 0$ を導くことができます．これを (1) に代入すると

$$c_1\vec{p} = \vec{0}$$

となりますが，$\vec{p} \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$ となります.

IX

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix},$$

とします．さらに

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 10 \\ 17 \end{pmatrix},$$

とします.

(1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線型独立で

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in L = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

であることを示しましょう.

(2) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ が線型独立で，$L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ の基底となることを示しましょう.

(3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が L で定める座標と $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ が L で定める座標を相互に表しましょう.

解答

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\mid\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&3&2&3\\2&3&4&8&7&9\\1&3&6&7&9&10\\3&5&9&13&14&17\end{array}\right)\xrightarrow{(i)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&3&2&3\\0&1&2&2&3&3\\0&2&5&4&7&7\\0&2&6&4&8&8\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{(ii)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&-1&0\\0&1&2&2&3&3\\0&0&1&0&1&1\\0&0&2&0&2&2\end{array}\right)\xrightarrow{(iii)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&2&1&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

と行基本変形をすると
$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad x=y=z=0$$
であることが分かりますから $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線形独立であることが分かります．また
$$x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}-\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow x\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad x=1,\ y=2,\ z=0$$
から
$$\vec{\alpha}=\vec{a}+2\vec{b}$$
が分かります．同様に
$$\vec{\beta}=\vec{b}+\vec{c},\quad\vec{\gamma}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$
も分かります．さらに

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\2&1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{(a)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{(b)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&0&2&2&-1&1\end{array}\right)\xrightarrow{(c)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&-1&-2&1&0\\0&0&1&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{(d)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&-1&-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

から $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ は正則で $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ であることが分かります．他方
$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma})=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P\tag{\#}$$
が成立しますから
$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma})\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=\vec{0}$$
とすると
$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

が従います．このとき $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ は線型独立ですから

$$P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

となります．さらに P が正則ですから

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

であることが分かります．以上で $\vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma}$ が線型独立であることが示されました．

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

とすると $(\#)$ から

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

となりますが、$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ が線型独立ですから

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}$$

さらに

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

が分かります．

補足　$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbf{K}^n$ が線型独立であるとします．このとき

$$\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

に対して

$$\begin{pmatrix}\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1&\xi_2&\xi_3\\ \eta_1&\eta_2&\eta_3\\ \zeta_1&\zeta_2&\zeta_3\end{pmatrix}$$

を満たす

$$X=\begin{pmatrix}\xi_1&\xi_2&\xi_3\\ \eta_1&\eta_2&\eta_3\\ \zeta_1&\zeta_2&\zeta_3\end{pmatrix}$$

を定めます．このとき以下の定理が成立します．

定理　以下の (1), (2), (3) は必要十分です．

(1) X は正則です．

(2) $\vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma}$ は線型独立です．

(3) $L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=L(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$

証明　(1)⇒(2)

$$\begin{pmatrix}\vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

とします．すると

$$\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

が従います．ここで $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ が線型独立であることを用いると

$$X\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\vec{0}$$

が分かります．さらに X が正則ですから $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\vec{0}$ が分かります．

(1)⇒(2)

$$L(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})\subset L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

は明らかです．もし

$$L(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})\subsetneq L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

であるとすると，ある $\vec{\delta}\in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ が

$$\vec{\delta}\notin L(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})$$

を満たします．このとき

$$\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\delta}\in L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\text{が線型独立である}$$

ことになりますから，矛盾が生じます．よって

$$L(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma})=L(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

であることになります．

(3)⇒(1)

$$\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\alpha} & \vec{\beta} & \vec{\gamma}\end{pmatrix}Y$$

を満たす $Y\in M_3(\mathbf{K})$ が存在します．このとき

$$\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}XY$$

となりますが，$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線型独立ですから，任意の $\vec{v}\in\mathbf{K}^3$ に対して

$$\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}XY\vec{v}$$

が成立することから

$$\vec{v}=XY\vec{v}$$

が従います．これから

$$XY=I_3$$

が従います．これは X が正則であることを意味します．

X

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

とします．さらに

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

とします．

(1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が線型独立で

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in L = L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

であることを示しましょう．

(2) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ が線型独立で，$L(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ の基底となることを示しましょう．

(3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が L で定める座標と $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ が L で定める座標を相互に表しましょう．

解答

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c} \mid \vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 5 & 10 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{(i)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(ii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(iii)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(iv)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と行基本変形をすると

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0$$

であることが分かりますから $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は線型独立であることが分かります．また

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} - \vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\ y = 1,\ z = 0$$

から

$$\vec{\alpha} = \vec{a} + \vec{b}$$

が分かります．同様に

$$\vec{\beta} = -\vec{a} + \vec{c}, \quad \vec{\gamma} = \vec{b} + \vec{c}$$

も分かります．さらに

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(a)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(b)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(c)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(d)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

から $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ は正則で $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ であることが分かります．他方

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}) = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P \tag{\#}$$

が成立しますから

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

とすると

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

が従います．このとき $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は線型独立ですから

$$P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

となります．さらに P が正則ですから

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \vec{0}$$

であることが分かります．以上で $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ が線型独立であることが示されました．

$$(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とすると (#) から

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

となりますが、$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ が線型独立ですから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

さらに

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

が分かります.

XI 演習 5.7（教科書 136 ページ） $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$ であるための a, b, c に関する条件を求めましょう.

解答

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ -1 & 3 & 1 & b \\ 2 & -4 & 0 & c \end{array}\right) \underset{(i)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 3 & 3 & a+b \\ 0 & -4 & -4 & -2a+c \end{array}\right)$$
$$\underset{(ii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b \\ 0 & -4 & -4 & -2a+c \end{array}\right) \underset{(iii)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}a+\frac{4}{3}b+c \end{array}\right)$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) &\quad 2r+ = 1r,\ 3r+ = 1r \times (-2) \\ (ii) &\quad 2r\times = \frac{1}{3} \\ (iii) &\quad 3r+ = 2r \times 4 \end{aligned}$$

を施します．これから

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2y & = & a \\ & & y & + & z & = & \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & -\frac{2}{3}a+\frac{4}{3}b+c \end{array} \right.$$

であることが分かります．この条件を満たす $x, y, z \in \mathbf{R}$ が存在することが

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$$

ですので，求める条件が

$$-\frac{2}{3}a + \frac{4}{3}b + c = 0 \quad \text{すなわち} \quad -2a + 4b + 3c = 0$$

であることが分かります.

XII 演習 5.8（教科書 137 ページ） $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ に対して $\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ となる条件を行列によって $B\vec{v} = \vec{0}$ と表しましょう．

解答

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & 4 & 3 & y \\ 3 & 1 & 2 & z \\ 1 & 3 & 2 & w \end{pmatrix} \xrightarrow[(i)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & -2x+y \\ 0 & -2 & -1 & -3x+z \\ 0 & 2 & 1 & -x+w \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(ii)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & -5x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & x-y+w \end{pmatrix} \xrightarrow[(iii)]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -x+\frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & 0 & -5x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & x-y+w \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(iv)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2x-\frac{1}{2}y \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -x+\frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & 0 & -5x+y+z \\ 0 & 0 & 0 & x-y+w \end{pmatrix}$$

と行基本変形

$$\begin{aligned} (i) &\quad 2r+=1r\times(-2),\ 3r+=1r\times(-3),\ 4r+=1r\times(-1) \\ (ii) &\quad 3r+=2r,\ 4r+=2r\times(-1) \\ (iii) &\quad 2r\times=\frac{1}{2} \\ (iv) &\quad 1r+=2r\times(-1) \end{aligned}$$

を施します．$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3)$ と列ベクトル表示をすると $\vec{v} = {}^t(x\ y\ z\ w)$ に対して

$$\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} c_1 & & & + & \frac{1}{2}c_3 & = & 2x-\frac{1}{2}y \\ & & c_2 & + & \frac{1}{2}c_3 & = & -x+\frac{1}{2}y \\ 0c_1 & + & 0c_2 & + & 0c_3 & = & -5x+y+z \\ 0c_1 & + & 0c_2 & + & 0c_3 & = & x-y+w \end{array} \right.$$

が成立します．もし

$$-5x+y+z \neq 0 \quad \text{または} x-y+w \neq 0$$

ならば右側の条件が成立しませんから $\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ ならば

$$-5x+y+z = 0 \quad \text{かつ} x-y+w = 0 \tag{1}$$

が必要であることが分かります．逆に (1) が成立するならば

$$c_1 = 2x - \frac{1}{2}y,\ c_2 = -x + \frac{1}{2}y,\ c_3 = 0$$

が

$$\vec{v} = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 \in \mathrm{Im}(A)$$

を満たします．従って (1) が $\vec{v} \in \mathrm{Im}(A)$ の必要十分条件で

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

と表されます．