2 変数 2 次形式とその正定値性

Nobuyuki TOSE

V01 Oct 19, 2020 for CalcNT

対称行列

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R})$ を**対称行列**と呼びます．転置作用素を用いると

$$ {}^tA = {}^t\begin{pmatrix} \color{red}{a} & \color{blue}{c} \\ \color{red}{c} & \color{blue}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{a} & \color{red}{c} \\ \color{blue}{c} & \color{blue}{b} \end{pmatrix} = A $$

となります（固有値問題で重要になります）．

なぜ対称行列—2 次形式

$$(A\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)) = ax^2 + 2cxy + by^2$$

を対称行列 A が定める（2 変数）2 次形式と呼びます.

Hesse 行列が定める 2 次形式 (1)

$\mathbf{R}^2$ の開集合 U 上の C^2 級関数

$$f: \ U \to \mathbf{R}$$

が与えられているとき，$\mathrm{P} \in U$ に対して

$$H(f)(\mathrm{P}) := \begin{pmatrix} f_{xx}(\mathrm{P}) & f_{xy}(\mathrm{P}) \\ f_{yx}(\mathrm{P}) & f_{yy}(\mathrm{P}) \end{pmatrix}$$

を f の P における Hesse 行列と呼びます．Young の定理から

$$f_{xy}(\mathrm{P}) = f_{yx}(\mathrm{P})$$

が成立しますから，$H(f)(\mathrm{P})$ は対称行列です．

Hesse 行列が定める 2 次形式 (2)

$\mathrm{P}_0(a,b) \in U$, $\vec{v} = \binom{\alpha}{\beta} \in \mathbf{R}^2$ に対して 1 変数関数を $\mathrm{P}_t(a+t\alpha, b+t\beta)$ を用いて

$$F(t) := f(\mathrm{P}_t) = f(a+\alpha t, b+\beta t)$$

と定義します．このとき f の P_t における $\vec{v}$ 方向の 2 階微分は

$$F''(t) = (H(f)(\mathrm{P}_t)\vec{v}, \vec{v})$$

と 2 次形式として表されます．

2 次形式の正定値性 (1)

定義

対称行列 $A\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ c & b \end{smallmatrix}\right)$ が定める 2 次形式 $(A\vec{v}, \vec{v})$ が**正定値**であるとは

$$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{o})$$

定理

$(A\vec{v}, \vec{v})$ が正定値 $\Leftrightarrow a > 0,\ |A| = ab - c^2 > 0$

2 次形式の正定値性 (2)—定理の証明 ($\Leftarrow$)

注意 $p, q \in \mathbf{R}$ に対して $p, q \geq 0,\ p + q = 0 \Rightarrow p = q = 0$

$$
\begin{aligned}
ax^2 + 2cxy + by^2 &= a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + by^2 - \frac{c^2}{a}y^2 \\
&= a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 + \frac{ab - c^2}{a}y^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

において，最後の不等号の等号成立条件は

$$
a\left(x + \frac{c}{a}y\right)^2 = \frac{ab - c^2}{a}y^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{c}{a}y = y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0
$$

従って $x \neq 0$ または $y \neq 0$ ならば $ax^2 + 2cxy + by^2 > 0$

2 次形式の正定値性 (3)—定理の証明 ($\Rightarrow$)

$0 < (\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = a$ に注意する．さらに $a > 0$ の下で

$$\frac{ab - c^2}{a} > 0 \Leftrightarrow ab - c^2 > 0$$

である．ここで

$$0 < \left(\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{ab - c^2}{a}$$

から $ab - c^2 > 0$ が従います.

注意

同様に

定理

$(A\vec{v}, \vec{v})$ が負定値 $\Leftrightarrow (A\vec{v}, \vec{v}) < 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow a < 0,\ |A| = ab - c^2 > 0$