2 次正方行列 (No.1)

Nobuyuki TOSE

MSF2019, April 30, 2019（平成最後の講義）

行列の掛け算

- 行ベクトル × 列ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2$$

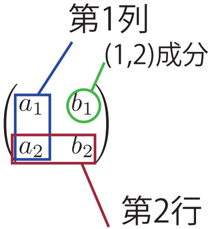
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

2行の行列

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$(\vec{a}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ (2 行 2 列の行列)



$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ (2 行 3 列の行列)

行列 × 列ベクトル

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} = x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_1+yb_1 \\ xa_2+yb_2 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_1+yb_1+zc_1 \\ xa_2+yb_2+zc_2 \end{pmatrix}$$

連立 1 次方程式の表現は次のようになる.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1x + b_1y &=& \alpha \\ a_2x + b_2y &=& \beta \end{array} \right. \Leftrightarrow x\vec{a} + y\vec{b} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z &=& \alpha \\ a_2x + b_2y + c_2z &=& \beta \end{array} \right. \Leftrightarrow x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

注意 $(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b}$, $(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ は $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{K}^n$ で定義できる.

3 行の行列

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

に対して

$$\begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

$$= x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_1+yb_1 \\ xa_2+yb_2 \\ xa_3+yb_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

3 行の行列 (2)

$$\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = x\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}xa_1+yb_1+zc_1\\xa_2+yb_2+zc_2\\xa_3+yb_3+zc_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

2 次正方行列の積

$$X = (\vec{a}\ \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad Y = (\vec{p}\ \vec{q}) = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}$$

に対して

$$\begin{aligned}
XY = X(\vec{p}\ \vec{q}) &= (X\vec{p}\ X\vec{q}) \\
&= (p_1\vec{a} + p_2\vec{b} \quad q_1\vec{a} + q_2\vec{b}) \\
&= \begin{pmatrix} p_1 a_1 + p_2 b_1 & q_1 a_1 + q_2 b_1 \\ p_1 a_2 + p_2 b_2 & q_1 a_2 + q_2 b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_1\ b_1)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} & (a_1\ b_1)\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\ (a_2\ b_2)\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} & (a_2\ b_2)\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

行列の積の基本性質

線型性

$$X(\vec{p}+\vec{q}) = X\vec{p} + X\vec{q}, \quad X(\lambda\vec{p}) = \lambda\,(X\vec{p})$$

$$\begin{aligned}
LHS &= X\left(\begin{smallmatrix} p_1+q_1 \\ p_2+q_2 \end{smallmatrix}\right) = (p_1+q_1)\vec{a} + (p_2+q_2)\vec{b} \\
&= (p_1\vec{a} + p_2\vec{b}) + (q_1\vec{a} + q_2\vec{b}) = X\vec{p} + X\vec{q} \\
LHS &= X\begin{pmatrix} \lambda p_1 \\ \lambda p_2 \end{pmatrix} = (\lambda p_1)\,\vec{a} + (\lambda p_2)\,\vec{b} \\
&= \lambda(p_1\vec{a}) + \lambda(p_2\vec{b}) \\
&= \lambda(p_1\vec{a} + p_2\vec{b}) = \lambda(X\vec{p})
\end{aligned}$$

行列の積の基本性質 (2)

線型性 (2)

$$X(\lambda\vec{p} + \mu\vec{q}) = \lambda(X\vec{p}) + \mu(X\vec{q})$$

$$\begin{aligned} LHS &= X(\lambda\vec{p}) + X(\mu\vec{q}) \\ &= \lambda(X\vec{p}) + \mu(X\vec{q}) \end{aligned}$$

結合法則

結合法則 (1)

2 次正方行列 $X = (\vec{a}\ \vec{b})$, $Y = (\vec{p}\ \vec{q})$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$X(Y\vec{c}) = (XY)\vec{c}$$

$$\begin{aligned} LHS &= X(c_1\vec{p} + c_2\vec{q}) = c_1(X\vec{p}) + c_2(X\vec{q}) \\ &= (X\vec{p}\ X\vec{q})\vec{c} = (XY)\vec{c} \end{aligned}$$

結合法則

結合法則 (2)

$Z = (\vec{c}\ \vec{d}) = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$(XY)Z = X(YZ)$$

$$\begin{aligned} LHS &= (XY)(\vec{c}\ \vec{d}) = \Big((XY)\vec{c}\ (XY)\vec{d}\Big) \\ &= \Big(X(Y\vec{c})\ X(Y\vec{d})\Big) = X\left(Y\vec{c}\ Y\vec{d}\right) \\ &= X(YZ) \end{aligned}$$

連立1次方程式と行列式

連立1次方程式

$$\begin{cases} ax+by &= 0 \\ cx+dy &= 0 \end{cases} \qquad \left(\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right) \qquad (\#)$$

を考える． $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$ のとき

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

よって

$$\boxed{D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0 \ \Rightarrow \left((\#) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)}$$

連立1次方程式と行列式(2)

逆の対偶

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc=0 \ \Rightarrow \left(\exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{が}\ (\#)\ \text{を満たす}\right)$$

これを示すために

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}=\vec{0}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}=\vec{0}$$

に注意する.

連立1次方程式と行列式 (3)

(i) $\underline{a \neq 0 \text{ OR } b \neq 0}$のとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{AND} \quad \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

(ii) $\underline{c \neq 0 \text{ OR } d \neq 0}$のとき

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \text{AND} \quad \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

(iii) NOT (i) AND NOT (ii) $\Leftrightarrow a = b = c = d = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

連立１次方程式と行列式 (4)

定理

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$$