2 次正方行列 (No.2)—演算

Nobuyuki TOSE

MSF2019 L04, April, 2019（平成最後の講義）, V03 2020 Lecs

ベクトルの演算

(1) $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{1}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{2}$$

が成立します.

(2) $\vec{a},\ \vec{b} \in \mathbf{R}^n$ と $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ に対して

$$\lambda\,(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} \tag{3}$$

$$(\lambda + \mu)\,\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \tag{4}$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \tag{5}$$

2 次正方行列の和とスカラー倍

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \left(\vec{b}_1 \ \vec{b}_2\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$$

に対して，A と B の和と差を

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} = \left(\vec{a}_1 + \vec{b}_1 \ \vec{a}_2 + \vec{b}_2\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix} = \left(\vec{a}_1 - \vec{b}_1 \ \vec{a}_2 - \vec{b}_2\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$$

と定義します．さらに $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して A の λ 倍を

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} = (\lambda \vec{a}_1 \ \lambda \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{a}_1 \\ \lambda \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}$$

と定義します．

定理 1

定理 1

2 次正方行列行列 A, B, C に対して，以下が成立します．

(1) $A+B=B+A$

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$

(4) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

(5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

定理 2

定理 2

A, B, X, Y, Q は 2 次正方行列とします.

(1) $(A+B)X = AX + BX$

(2) $A(X+Y) = AX + AY$

(3) $A(\alpha X) = (\alpha A)\,X = \alpha(AX)$

(4)（結合法則）$(AX)\,Q = A\,(XQ)$

定理 2—証明の準備

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$(A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$$

$$A(\lambda\vec{x}) = (\lambda A)\vec{x} = \lambda(A\vec{x})$$

定理 2—証明

(1) $X = (\vec{x}_1\ \vec{x}_2)$ と X を列ベクトル表示すると

$$\begin{aligned}(A+B)X &= ((A+B)\vec{x}_1 \quad (A+B)\vec{x}_2) = (A\vec{x}_1 + B\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2 + B\vec{x}_2) \\ &= (A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2) + (B\vec{x}_1 \quad B\vec{x}_2) = AX + BX\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}A(X+Y) &= A\left(\vec{x}_1 + \vec{y}_1 \quad \vec{x}_2 + \vec{y}_2\right) \\ &= (A(\vec{x}_1 + \vec{y}_1) \quad A(\vec{x}_2 + \vec{y}_2)) \\ &= (A\vec{x}_1 + A\vec{y}_1 \quad A\vec{x}_2 + A\vec{y}_2) \\ &= (A\vec{x}_1 \quad A\vec{x}_2) + (A\vec{y}_1 \quad A\vec{y}_2) = AX + AY\end{aligned}$$

(3) 示すべき等式は

$$(A(\lambda\vec{x}_1) \quad A(\lambda\vec{x}_2)) = ((\lambda A)\,\vec{x}_1 \quad (\lambda A)\,\vec{x}_2) = (\lambda(A\vec{x}_1)\ \lambda(A\vec{x}_2))$$