2 次正方行列の固有値問題

戸瀬　信之

ITOSE PROJECT

2019 年 05 月 emath.HC

2 次正方行列の固有方程式

- 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有多項式

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + \det(A) \end{aligned}$$

- $$\Phi_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow A\vec{v} = \alpha\vec{v} \text{を満たす} \vec{v} \neq \vec{0} \text{が存在}$$

具体例

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有多項式

$$\begin{aligned} \Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

- 固有値 $\lambda = 5$ の固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 4x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

具体例 (No. 2)

- 固有値 $\lambda = -1$ の固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow -2x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

行列の対角化

- $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ とすると

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2) = (5\vec{p}_1\ \ -\vec{p}_2) \\ &= (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ から P は正則
- A は対角化可能

$$A = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

行列の対角化（その意味）

- A が定める変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- 変数変換
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{p}_1 + \eta \vec{p}_2 = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \xi' \vec{p}_1 + \eta' \vec{p}_2 = P \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}$$
-

行列の対角化（その意味）(No.2)

- $$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\xi' \\ \eta'\end{pmatrix} &= P^{-1}\begin{pmatrix}x' \\ y'\end{pmatrix} = P^{-1}A\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} \\ &= P^{-1}AP\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}5 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

行列の対角化（その応用）

- 対角化 $A = P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$

$$\begin{aligned}
A^2 &= P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}I_2\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix}P^{-1} \\
A^n &= P\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}$$

行列の対角化（一般論）

- 定理　2 次正方行列 A の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

に対して、$\alpha \neq \beta$ が成立するとする。このとき A は対角化可能です。すなわち正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になります。

- $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$、$A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$ で $\vec{p}_i \neq \vec{0}$ $(i = 1, 2)$

$$\begin{aligned} A\begin{pmatrix}\vec{p}_1 & \vec{p}_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}A\vec{p}_1 & A\vec{p}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\vec{p}_1 & \beta\vec{p}_2\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\vec{p}_1 & \vec{p}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2)$ の正則性
- 定理 2 次正方行列 P に対して

$$\begin{aligned} P\text{は正則} &\Leftrightarrow \det(P) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(P\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = \vec{0}\right) \end{aligned}$$

- $c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ を示す。

$$\begin{aligned} & c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0} \\ \to\ & (\beta I_2 - A)(c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2) = (\beta - \alpha)c_1\vec{p}_1 = \vec{0} \\ \to\ & c_1\vec{p}_1 = \vec{0} \to c_1 = 0 \end{aligned}$$

- 注意 $\vec{q} \neq \vec{0}$ ならば $\left(c\vec{q} = \vec{0} \Leftrightarrow c = 0\right)$

固有多項式に関する注意

- 定理 P が正則ならば

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda)$$

- 2 次正方行列 $A,\ B$ に対して $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ を用いる。
- $\det(P^{-1})\det(P) = \det(P^{-1}P) = \det(I_2) = 1$
-

$$\begin{aligned}
\det\left(\lambda I_2 - P^{-1}AP\right) &= \det\left(P^{-1}\lambda I_2 P - P^{-1}AP\right) \\
&= \det\left(P^{-1}(\lambda I_2 - A)P\right) \\
&= \det(P^{-1})\det(\lambda I_2 - A)\det(P) \\
&= \det(\lambda I_2 - A)
\end{aligned}$$

固有多項式に関する注意 (No.2)–応用

- 正則行列 $\boldsymbol{P}$ により

$$A = P\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}P^{-1} \quad \text{以下} \quad A_0 = \begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}$$

と対角化されたら

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{PA_0P^{-1}}(\lambda) = \Phi_{A_0}(\lambda) = (\lambda-\gamma)(\lambda-\delta)$$

固有多項式に関する注意 (No.3)–応用

- $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ は対角化できない。
- $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$ から、A が対角化可能ならば

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot \alpha I_2 P^{-1} = \alpha I_2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{これは矛盾}$$

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$A^2 - (a+d)A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$$

- 具体例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して $A^2 - 4A - 5I_2 = O_2$

$$A^2 - (5 + (-1))A + 5 \cdot (-1)I_2 = O_2$$

$$\to A(A + I_2) = 5(A + I_2), \quad A(A - 5I_2) = -(A - 5I_2)$$

$$\to A^n(A + I_2) = 5^n(A + I_2), \quad A^n(A - 5I_2) = (-1)^n(A - 5I_2)$$

$$\to 6A^n = 5^n(A + I_2) - (-1)^n(A - 5I_2)$$

- 2 次正方行列 A の固有値 $\alpha,\ \beta$ が $\alpha \neq \beta$

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta I_2 = O_2$$

$$\to A(A - \alpha I_2) = \beta(A - \alpha I_2), \quad A(A - \beta I_2) = \alpha(A - \beta I_2)$$

$$\to A^n(A - \alpha I_2) = \beta^n(A - \alpha I_2), \quad A^n(A - \beta I_2) = \alpha^n(A - \beta I_2)$$

$$\to (\beta - \alpha)A^n = \beta^n(A - \alpha I_2) - \alpha^n(A - \beta I_2)$$

$$\to A^n = \frac{\beta^n}{\beta - \alpha}(A - \alpha I_2) - \frac{\alpha^n}{\beta - \alpha}(A - \beta I_2)$$