

2次正方行列の固有値問題

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

May, 2017 for emath
V04 Oct 26, 2020 for CalcNT

2次正方行列の正則性（復習）

2次正方行列 $B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$B \text{ は正則} \Leftrightarrow (B\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}) \Leftrightarrow |B| \neq 0$$

特に

$$\exists \vec{v} \neq \vec{0} (B\vec{v} = \vec{0}) \Leftrightarrow |B| = 0$$

2次正方行列の固有方程式

- 2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有多項式

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + \det(A)\end{aligned}$$

■

$$\Phi_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow A\vec{v} = \alpha\vec{v} \text{ を満たす } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ が存在}$$

具体例

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有多項式

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)\end{aligned}$$

- 固有値 $\lambda = 5$ の固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 4x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

具体例 (No. 2)

- 固有値 $\lambda = -1$ の固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow -2x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

行列の対角化

- $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$ とすると

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (5\vec{p}_1 \ -\vec{p}_2) \\ &= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- $\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ から P は正則

- A は対角化可能

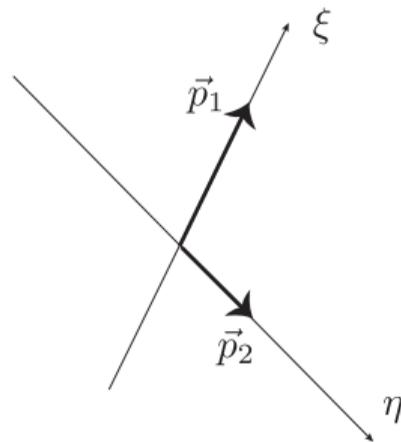
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

行列の対角化（その意味）

- A が定める変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- 変数変換

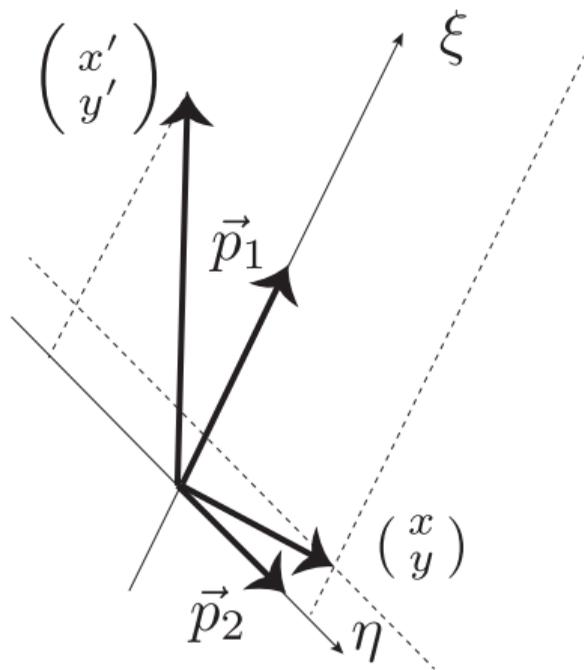
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{p}_1 + \eta \vec{p}_2 = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \xi' \vec{p}_1 + \eta' \vec{p}_2 = P \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}$$



行列の対角化（その意味）(No.2)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}AP \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\end{aligned}$$



行列の対角化（その応用）

■ 対角化 $A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$

$$A^2 = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} I_2 \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A^n = P \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

行列の対角化（一般論）

- 定理 2次正方行列 A の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

に対して、 $\alpha \neq \beta$ が成立するとする。このとき A は対角化可能です。すなわち正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になります。

- $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$ 、 $A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$ で $\vec{p}_i \neq \vec{0}$ ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} A(\vec{p}_1 \quad \vec{p}_2) &= (A\vec{p}_1 \quad A\vec{p}_2) = (\alpha\vec{p}_1 \quad \beta\vec{p}_2) \\ &= (\vec{p}_1 \quad \vec{p}_2) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

行列の対角化（一般論）(No.2)

- $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$ の正則性

定理 2次正方行列 P に対して

$$P \text{は正則} \Leftrightarrow \det(P) \neq 0 \Leftrightarrow (P\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = \vec{0})$$

- $c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$ を示す。

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0}$$

$$\rightarrow (\beta I_2 - A)(c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2) = (\beta - \alpha)c_1\vec{p}_1 = \vec{0}$$

$$\rightarrow c_1\vec{p}_1 = \vec{0} \rightarrow c_1 = 0$$

- 注意 $\vec{q} \neq \vec{0}$ ならば $(c\vec{q} = \vec{0} \Leftrightarrow c = 0)$

固有多項式に関する注意

- 定理 P が正則ならば

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda)$$

- 2次正方行列 A, B に対して $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ を用いる。
- $\det(P^{-1})\det(P) = \det(P^{-1}P) = \det(I_2) = 1$

■

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_2 - P^{-1}AP) &= \det(P^{-1}\lambda I_2P - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}(\lambda I_2 - A)P) \\ &= \det(P^{-1})\det(\lambda I_2 - A)\det(P) \\ &= \det(\lambda I_2 - A)\end{aligned}$$

固有多項式に関する注意 (No.2)-応用

- 正則行列 P により

$$A = P \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{以下} \quad A_0 = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

と対角化されたら

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{PA_0P^{-1}}(\lambda) = \Phi_{A_0}(\lambda) = (\lambda - \gamma)(\lambda - \delta)$$

固有多項式に関する注意 (No.3)-応用

- $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ は対角化できない。
- $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$ から、 A が対角化可能ならば

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot \alpha I_2 P^{-1} = \alpha I_2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{これは矛盾}$$

Cayley-Hamilton の定理

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$A^2 - (a + d)A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$$

- 具体例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して $A^2 - 4A - 5I_2 = O_2$

$$A^2 - (5 + (-1))A + 5 \cdot (-1)I_2 = O_2$$

$$\rightarrow A(A + I_2) = 5(A + I_2), \quad A(A - 5I_2) = -(A - 5I_2)$$

$$\rightarrow A^n(A + I_2) = 5^n(A + I_2), \quad A^n(A - 5I_2) = (-1)^n(A - 5I_2)$$

$$\rightarrow 6A^n = 5^n(A + I_2) - (-1)^n(A - 5I_2)$$

- 2次正方行列 A の固有値 α, β が $\alpha \neq \beta$

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta I_2 = O_2$$

$$\rightarrow A(A - \alpha I_2) = \beta(A - \alpha I_2), \quad A(A - \beta I_2) = \alpha(A - \beta I_2)$$

$$\rightarrow A^n(A - \alpha I_2) = \beta^n(A - \alpha I_2), \quad A^n(A - \beta I_2) = \alpha^n(A - \beta I_2)$$

$$\rightarrow (\beta - \alpha)A^n = \beta^n(A - \alpha I_2) - \alpha^n(A - \beta I_2)$$

$$\rightarrow A^n = \frac{\beta^n}{\beta - \alpha}(A - \alpha I_2) - \frac{\alpha^n}{\beta - \alpha}(A - \beta I_2)$$