

# 2次正方行列の固有値問題

戸瀬 信之

ITOSE PROJECT

May, 2017 for emath  
V04 Oct 26, 2020 for CalcNT  
V05 Oct 06, 2020 for LA

## 2変数の線型変換の座標変換

2次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  が定める線型変換

$$F_A: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

に対して正則な  $P \in M_2(\mathbf{R})$  による座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

を適用する.

## 2変数の線型変換の座標変換（その2）

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

となる.

**目標** 正則行列  $P$  をうまく選んで  $P^{-1}AP$  を単純にする.

## 2変数の線型変換の座標変換 (その3)

ある正則行列  $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$  によって  $P^{-1}AP$  が対角行列になるとする.

$$\begin{aligned}P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow AP = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (\alpha\vec{p}_1 \ \beta\vec{p}_2) \\ &\Leftrightarrow A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, \quad A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2 \\ &\Leftrightarrow (\alpha I_2 - A)\vec{p}_1 = (\beta I_2 - A)\vec{p}_2 = \vec{0}\end{aligned}$$

$P$  は正則であるので  $\vec{p}_1 \neq \vec{0}$ ,  $\vec{p}_2 \neq \vec{0}$  なので

$$|\alpha I_2 - A| = |\beta I_2 - A| = 0$$

が必要であることが分かります.

## 2次正方行列の正則性（復習）

2次正方行列  $B \in M_2(\mathbf{R})$  に対して

$$B \text{ は正則} \Leftrightarrow (B\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}) \Leftrightarrow |B| \neq 0$$

特に

$$\exists \vec{v} \neq \vec{0} (B\vec{v} = \vec{0}) \Leftrightarrow |B| = 0$$

## 2次正方行列の固有方程式

- 2次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の固有多項式

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= |\lambda I_2 - A| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + \det(A)\end{aligned}$$

■

$$\Phi_A(\alpha) = 0 \Leftrightarrow A\vec{v} = \alpha\vec{v} \text{ を満たす } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ が存在}$$

# 具体例

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  の固有多項式

$$\begin{aligned}\Phi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -4 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)\end{aligned}$$

- 固有値  $\lambda = 5$  の固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow 4x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

## 具体例 (No. 2)

- 固有値  $\lambda = -1$  の固有ベクトルを求める。

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow -2x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$



# 行列の対角化

■  $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$  とすると

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2) = (5\vec{p}_1 \ -\vec{p}_2) \\ &= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■  $\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$  から  $P$  は正則

■  $A$  は対角化可能

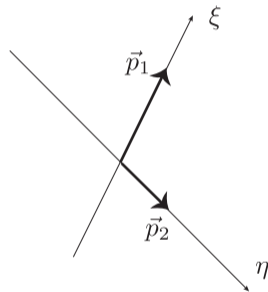
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

# 行列の対角化（その意味）

- $A$  が定める変換  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- 変数変換

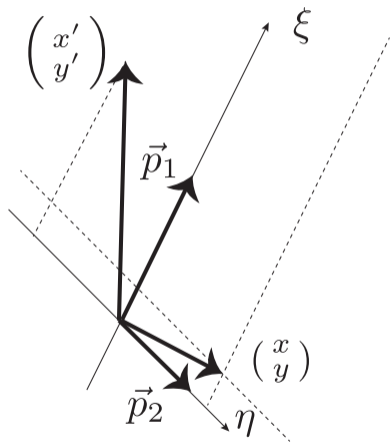
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{p}_1 + \eta \vec{p}_2 = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \xi' \vec{p}_1 + \eta' \vec{p}_2 = P \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix}$$



## 行列の対角化（その意味）(No.2)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} &= P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1}A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= P^{-1}AP \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\end{aligned}$$



# 行列の対角化（その応用）

■ 対角化  $A = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$

$$A^2 = P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} I_2 \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A^n = P \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

# 行列の対角化（一般論）

- 定理 2次正方行列  $A$  の固有多項式

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

に対して、 $\alpha \neq \beta$  が成立するとする。このとき  $A$  は対角化可能です。すなわち正則行列  $P$  が存在して  $P^{-1}AP$  が対角行列になります。

- $A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1$ 、 $A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$  で  $\vec{p}_i \neq \vec{0}$  ( $i = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} A(\vec{p}_1 \quad \vec{p}_2) &= (A\vec{p}_1 \quad A\vec{p}_2) = (\alpha\vec{p}_1 \quad \beta\vec{p}_2) \\ &= (\vec{p}_1 \quad \vec{p}_2) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 行列の対角化（一般論）(No.2)

- $P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2)$  の正則性

定理 2次正方行列  $P$  に対して

$$P \text{は正則} \Leftrightarrow \det(P) \neq 0 \Leftrightarrow (P\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = \vec{0})$$

- $c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$  を示す。

$$c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2 = \vec{0}$$

$$\rightarrow (\beta I_2 - A)(c_1\vec{p}_1 + c_2\vec{p}_2) = (\beta - \alpha)c_1\vec{p}_1 = \vec{0}$$

$$\rightarrow c_1\vec{p}_1 = \vec{0} \rightarrow c_1 = 0$$

- 注意  $\vec{q} \neq \vec{0}$  ならば  $(c\vec{q} = \vec{0} \Leftrightarrow c = 0)$

# 固有多項式に関する注意

- 定理  $P$  が正則ならば

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda)$$

- 2次正方行列  $A, B$  に対して  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$  を用いる。
- $\det(P^{-1})\det(P) = \det(P^{-1}P) = \det(I_2) = 1$

■

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_2 - P^{-1}AP) &= \det(P^{-1}\lambda I_2 P - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}(\lambda I_2 - A)P) \\ &= \det(P^{-1})\det(\lambda I_2 - A)\det(P) \\ &= \det(\lambda I_2 - A)\end{aligned}$$

- 正則行列  $P$  により  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$  と対角化できたとします.

$$\Phi_A(\lambda) = \Phi_{P^{-1}AP}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \gamma & 0 \\ 0 & \lambda - \delta \end{vmatrix} = (\lambda - \gamma)(\lambda - \delta)$$



## 固有多項式に関する注意 (No.3)-応用

- $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$  は対角化できない。
- $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$  から、 $A$  が対角化可能ならば

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} = P \cdot \alpha I_2 P^{-1} = \alpha I_2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{これは矛盾}$$

**定理**  $A \in M_2(\mathbf{R})$  の固有多項式が

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}$$

とする.

- (i)  $\alpha \neq \beta$  ならば  $A$  は対角化可能
- (ii)  $\alpha = \beta$  で  $A$  が対角化できるならば

$$A = \alpha I_2$$

# Cayley-Hamilton の定理

- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対して

$$A^2 - (a + d)A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$$

- 具体例  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  に対して  $A^2 - 4A - 5I_2 = O_2$

$$A^2 - (5 + (-1))A + 5 \cdot (-1)I_2 = O_2$$

$$\rightarrow A(A + I_2) = 5(A + I_2), \quad A(A - 5I_2) = -(A - 5I_2)$$

$$\rightarrow A^n(A + I_2) = 5^n(A + I_2), \quad A^n(A - 5I_2) = (-1)^n(A - 5I_2)$$

$$\rightarrow 6A^n = 5^n(A + I_2) - (-1)^n(A - 5I_2)$$

- 2次正方行列  $A$  の固有値  $\alpha, \beta$  が  $\alpha \neq \beta$

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta I_2 = O_2$$

$$\rightarrow A(A - \alpha I_2) = \beta(A - \alpha I_2), \quad A(A - \beta I_2) = \alpha(A - \beta I_2)$$

$$\rightarrow A^n(A - \alpha I_2) = \beta^n(A - \alpha I_2), \quad A^n(A - \beta I_2) = \alpha^n(A - \beta I_2)$$

$$\rightarrow (\beta - \alpha)A^n = \beta^n(A - \alpha I_2) - \alpha^n(A - \beta I_2)$$

$$\rightarrow A^n = \frac{\beta^n}{\beta - \alpha}(A - \alpha I_2) - \frac{\alpha^n}{\beta - \alpha}(A - \beta I_2)$$